П. Бриджмен

АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ

R&C Dynamics

P. W. BRIDGMAN

DIMENSIONAL ANALYSIS

NEW HAVEN
YALE UNIVERSITY PRESS
1932

П. Бриджмен

АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Перевод со второго
английского издания
под редакцией
акад. С. И. ВАВИЛОВА

Издание второе

РХД
Москва • Ижевск

2001

УДК 511

Бриджмен П.

Анализ размерностей. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 148 стр.

Книга Бриджмена является первой удачной попыткой упорядочить метод размерностей для представления его в такой форме, которая была бы доступна не только искушенному и опытному исследователю, но и начинающему научному работнику. Достоинство книги — в ее простоте, конкретности и увлекательности. Помимо оригинального, критического изложения теоретических основ метода, читателю предлагается большое число искусно подобранных несложных примеров. В новое издание вошла также нобелевская лекция П. Бриджмена, посвященная физике высоких энергий.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей — от научных работников, преподавателей и инженеров до студентов и школьников.

ISBN 5-93972-043-9

http://rcd.ru

Содержание

Предисловие ко второму русскому изданию

Изданная в 1934 году на русском языке небольшая книга известного физика, лауреата Нобелевской премии П. Бриджмена «Анализ размерностей» стала библиографической редкостью.

Удивительно точную оценку ее достоинств дал в предисловии к русскому переводу академик С. И. Вавилов, отметивший, в частности, простоту и конкретность излагаемого материала.

Ряд отмеченных П. Бриджменом особенностей метода размерностей получил существенное развитие в многочисленных последующих публикациях зарубежных и отечественных авторов. Особое место среди них занимают ставшие классическими монографии Г. Биркгофа «Гидродинамика» и Л. И. Седова «Методы подобия и размерностей в механике», содержащие большое количество примеров применения теории к широкому кругу проблем науки и техники.

В то же время, достаточно часто продолжают появляться работы, для которых характерен не по существу сложный и наукообразный стиль изложения, усложняющий понимание этого простого, часто успешно используемого научными работниками и инженерами метода исследования.

Полагаю, что переиздание русского перевода книги П. Бриджмена принесет несомненную пользу.

Ноябрь, 2000 г.

Заслуженный деятель науки РФ,
профессор В. П. Карликов

Предисловие к русскому переводу

Учение о размерностях физических величин давно вошло как обязательная глава в учебники физики высшей школы. Недостаточность и недоговоренность большинства таких изложений общеизвестны. Принято рассматривать размерности только как удобный метод для перехода от одной системы единиц к другой и в лучшем случае еще как средство первого контроля правильности физических уравнений. Структура формул размерности как произведений первичных величин в некоторых степенях предлагается в виде аксиомы; триада — масса, длина и время — фигурирует догматически. Анализ размерностей как эвристический метод физики в лучшем случае упоминается в связи с каким-нибудь одним примером без пояснений, оставляющим впечатление малоубедительного фокуса.

Между тем «в приватном порядке» физики широко пользуются анализом размерностей в качестве простого рекогносцировочного теоретического приема, позволяющего предугадать решение сложной задачи за исключением некоторого постоянного множителя. В руках таких искушенных исследователей, как Рэлей, Джинс, Эддингтон и др., метод приводил к ряду весьма интересных результатов. В технике, в особенности в аэродинамике, анализ размерностей получил за последние годы весьма широкое распространение.

Очевидно, что пришло время для упорядочения метода, для представления его в такой форме, которая была бы доступна не только искушенному и опытному исследователю, но и начинающему научному работнику.

Книга П. Бриджмена, насколько нам известно, является первой удачной попыткой в этом направлении. Достоинства книги — в ее простоте, конкретности и увлекательности. Помимо оригинального, критического изложения теоретических основ метода, читателю предлагается большое число очень искусно подобранных несложных примеров, разобранных в подробностях; в конце книги, кроме того, приложено 32 задачи на анализ размерностей.

Положительной стороной книги является также ее «несколько материалистическая» (по выражению автора) установка. П. Бриджмен настойчиво полемизирует со старыми и новыми физиками, пытавшимися усмотреть в формулах размерности откровения о «предельной сущности» физических величин. Анализ размерностей может дать очень многое, кроме, однако, того, что в нем заведомо не может содержаться.

В добавление к библиографии по анализу размерностей, приведенной в тексте, укажем на небольшую книгу A. W. Porter, The method of dimensions, 74 стр., London, 1933, содержащую подробное изложение нескольких примеров анализа.

На русском языке, помимо статьи Т. А. Афанасьевой–Эренфест, цитированной в тексте, вопросы анализа размерностей разбирались Н. А. Морозовым в книге «Основы качественного физико-математического анализа», Москва, 1908 г.

С. Вавилов

Предисловие автора ко второму изданию

При переиздании этой небольшой книги через 8 лет потребовались только небольшие изменения, учитывающие и новейшую литературу. Наиболее существенны исправления в доказательстве П-теоремы в четвертой главе. Я очень благодарен проф. Воррен Вевер из Висконсинского университета, обратившего мое внимание на одну ошибку прежнего доказательства и оказавшему мне помощь при новой формулировке. Я воспользовался также рядом указаний д-ра Бэкингэма, хотя уверен, что он и теперь не согласен со многим в моей книге.

Добавлены таблицы размерностей обычно применяемых величин в общепринятом определении. Надеюсь, что это окажется полезным при решении задач, но вместе с тем думаю, что ни у кого не возникнет мысли, что эти таблицы представляют что-то абсолютное. Эти формулы только результат практики, показавшей их пользу при решении задач.

Мне казалось, что мое изложение ясно и убедительно; к моему большому удивлению, однако, со времени появления книги я обнаружил у многих расхождение со мной по основным пунктам и, следовательно, вопрос не может до сих пор считаться бесспорным. Ничто из того, что высказывалось за эти 8 лет, не заставило меня переменить первоначальную точку зрения, которая осталась в новом издании прежней. Для беспристрастия и ориентации читателя в добавление к статьям, цитированным в книге, я указываю здесь некоторые наиболее существенные работы по этому вопросу.

N. Campbell. Physics. The Elements. Cambridge University Press гл. XIV и XV, 1920. Phil. Mag. 1924; **1**. 1145, 1926. Measurement and Calculation Longmans Green and Co гл. XIII, 1928. J. Wallot, ZS. f. Phys. **10**, 329, 1922. E. Buckingham. Phil. Mag. **48**, 141, 1924. Т. А. Эренфест–Афанасьева. Phil. Mag. **1**, 257, 1926.

(Ссылки на прежние важные работы Т. А. Эренфест–Афанасьевой можно найти в этой статье.)

Кэмбридж, Массачусетс *P. W. B.*
Январь 1931 г.

Предисловие автора к первому изданию

Содержание этой книги составили 5 лекций, прочитанных в Гарвардском университете весной 1920 г. (Graduate Conference in Physics).

Расширение области применения методов анализа размерностей в технической физике и его значение для теоретических исследований заставляют желать, чтобы каждый физик овладел этим методом анализа. До сих пор не было, однако, систематического изложения принципов метода.

Возможной причиной этого пробела могло служить мнение о крайней простоте предмета, делающей специальное изложение ненужным. Между тем часто встречаются очень существенные ошибки в отношении основ метода и его применений. Эти ошибки столь распространены и имели настолько глубокое влияние на характер многих спекулятивных построений (см. примеры в книге), что я считаю попытку устранения таких ошибок очень нужной работой.

Я предпринял поэтому систематическое изложение принципов метода размерностей, иллюстрировав применения многими примерами. Примеры специально подобраны так, чтобы особо оттенить те пункты, в отношении которых ошибки являются распространенными. Я имею в частности в виду вопросы о характере формул размерностей, потребном числе основных единиц и природе размерных постоянных. В добавление к примерам в тексте, в конце книги приложены задачи, которые, думаю, окажутся полезными.

Вводная глава предназначается для тех лиц, которые уже несколько знакомы с общим методом. Вероятно большинство читателей окажутся такими. В этой главе на конкретных примерах я выдвигаю наиболее важные вопросы, требующие обсуждения. Читатель, для которого предмет совершенно нов, может без всякого смущения пропустить эту главу.

Я особо обязан статьям д-ра Эдгара Бэкингэма по данному вопросу и признателен также М. Д. Герсею, сотруднику Бюро стандартов, который несколько лет тому назад изложил в ряде лекций результаты д-ра Бэкингэма.

Сентябрь 1920 г.

Глава 1
Введение

Каждому физику приходилось применять методы анализа размерностей к простым задачам, в частности в области механики. Разберем несколько примеров для возобновления в памяти сути дела, а также для выяснения тех вопросов, на которые следует ответить при критическом рассмотрении приемов и предпосылок правильного применения общего метода.

Начнем с очень показательной задачи о простом маятнике, фигурирующей в качестве введения едва ли не в каждом изложении метода. Наша цель — найти без детального решения задачи некоторые соотношения между различными измеряемыми величинами, представляющими для нас интерес. Обычный метод состоит в следующем. Прежде всего выписывается таблица величин, от которых, предположительно, зависит ответ, далее составляются формулы размерности этих величин и, наконец, налагается условие, чтобы эти величины входили в функциональные связи, не зависящие от единиц, в которых величины измерены.

Попробуем этим методом найти зависимость периода колебания простого маятника от переменных, определяющих его свойства. Очевидно, время колебания может зависеть от длины маятника, его массы, ускорения тяжести и амплитуды колебаний. Выпишем размерности этих величин, применяя основную систему величин, т. е. массу, длину и время. В формулах размерностей символы массы, длины и времени мы будем обозначать большими прямыми буквами в соответствующих степенях. Таблица величин в данном случае имеет такой вид:

Таблица 1.

Название величины	*Символ*	*Формула размерности*
Время колебания	t	T
Длина маятника	l	L
Масса маятника	m	M
Ускорение силы тяжести	g	$\mathrm{LT^{-2}}$
Угловая амплитуда колебания	θ	без размерности

Мы должны выразить t как функцию l, m, g и θ таким образом, чтобы функциональное соотношение оставалось неизменным при любом изменении размера основных единиц.

Пусть это соотношение имеет вид:

$$t = f(l, m, g, \theta).$$

Формулы размерностей показывают, каким образом основные единицы определяют численное значение переменных. Численная величина периода колебания зависит только от избранной единицы времени и не меняется при изменении единиц массы или длины. Следовательно, величины, стоящие под знаком f в правой части уравнения, должны быть ассоциированы так, чтобы вся комбинация оставалась неизменной при перемене единиц массы и длины. В частности, не должно произойти изменения при перемене единицы только одной массы. Но размер единицы массы влияет только на величину m. Поэтому, если вообще m входит в аргумент функции, то численное значение функции будет иным при изменении основной единицы массы, причем это изменение не может компенсироваться соответствующей переменой значений других количеств, поскольку последние не зависят от изменения размера единицы массы. Стало быть масса вообще не может входить в функциональное соотношение, иначе говоря, наша функция принимает вид:

$$t = f(l, g, \theta).$$

Величины l и g вместе должны входить в функцию так, чтобы числовое значение аргумента не менялось при перемене единицы длины и постоянном t, т. е. изменение числовой величины l, осуществляемое переменой размера единицы длины, должно в точности компенсироваться изменением значения g, происходящем при такой перемене единиц. Формула размерности показывает, что для выполнения этого необходимо разделить l на g, т. е.

$$t = f\left(\frac{l}{g}, \theta\right).$$

Далее, изменение основных единиц не может повлиять на числовую величину угловой амплитуды, так как она не имеет размерности и, следовательно, θ может входить в неизвестную функцию любым способом. Но очевидно, что $\frac{l}{g}$ должно быть представлено в функции так, чтобы вся комбинация имела размерность T, ибо такова размерность t, стоящего в левой части равенства. Отсюда ясно, что $\frac{l}{g}$ должно находиться под знаком квадратного корня, т. е.

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\varphi(\theta),$$

где функция φ на основании только приведенных рассуждений еще не подлежит дальнейшему ограничению. Фактически из элементарной механики нам известно, что для малых значений θ φ почти постоянна, не зависит от θ и равна приближенно 2π.

В связи с размерностью θ может возникнуть следующий вопрос. Мы сказали, что θ не имеет размерности, и что ее числовая величина не меняется при изменении основных единиц массы, длины и времени. Несомненно это верно, но отсюда еще не следует, что числовая величина θ определена однозначно, как легко видеть хотя бы из того, что θ может измеряться в градусах или радианах.

Имеем ли мы право поэтому считать θ постоянной величиной, которая может входить в функциональное соотношение любым способом?

Рассмотрим теперь тем же методом вопрос о периоде малых колебаний капелек жидкости под влиянием их поверхностного натяжения. Пусть капелька находится вне гравитационного поля и колебания относятся только к изменению формы, например от сферической к эллипсоидальной и обратно. Период колебания, очевидно, будет зависеть от поверхностного натяжения жидкости, ее плотности и радиуса невозмущенной жидкой сферы. Составим таблицу.

Таблица 2.

Название величины	*Символ*	*Формула размерности*
Период колебания	t	T
Поверхностное натяжение	s	MT^{-2}
Плотность жидкости	d	ML^{-3}
Радиус капли	r	L

Нам нужно найти такую функцию f, чтобы

$$t = f(s,\, d,\, r),$$

где f такова, что соотношение остается численно неизменным при любом выборе основных единиц, которыми измеряются t, s, d и r. Метод решения тот же, как и в задаче о маятнике. Ясно, что M должно сокращаться в правой части уравнения. Это может произойти только в том случае, если s и d входят в уравнение в виде отношения.

Отсюда

$$t = f\left(\frac{s}{d}, r\right).$$

Далее, L не входит в размерность t, поэтому L не может входить и в функцию f, т. е. $\frac{s}{d}$ и r должны находиться в таком сочетании, чтобы L сокращалось. Но L фигурирует в отношении $\frac{s}{d}$ в третьей степени, поэтому для освобождения от L необходимо разделить $\frac{s}{d}$ на r^3, т. е.

$$t = f\left(\frac{s}{dr^3}\right).$$

Размерность $\frac{s}{dr^3}$ равна T^{-2}. Функция f должна стало быть иметь такую форму, чтобы эта размерность превратилась в T, т. е. в размерность левой части уравнения. Отсюда окончательный результат:

$$t = \mathrm{const}\sqrt{\frac{dr^3}{s}}.$$

Результат подтверждается опытом и был указан Рэлеем как задача № 7 в его статье в Nature, т. 95, стр. 66, 1915 г.

Рассмотрим теперь, что мы подразумевали, говоря вначале, что период колебания будет «зависеть» только от поверхностного натяжения, плотности и радиуса. Имели ли мы при этом в виду, что результаты независимы, например, от молекулярной структуры жидкости? Разумеется, для всякого ясно, что поверхностное натяжение определяется силами между молекулами поверхностного слоя жидкости и будет зависеть очень сложным образом, не поддающимся еще точному расчету, от сорта и строения атомов и от сил между ними. Если это так, то почему же факторы, определяющие междумолекулярные силы, не могут входить в наш перечень основных величин? Они, несомненно, играют первостепенную роль в определении физических свойств. Наш выбор можно пытаться оправдать рассуждением вроде следующего: «Верно, что свойства жидкости определяются чрезвычайно сложной системой атомных сил, однако эти силы влияют на результат лишь постольку, поскольку это сказывается на одном свойстве — поверхностном натяжении». Это значило бы, что при измерении периода колебаний капель различных жидкостей, сколь угодно отличающихся по атомным свойствам, мы получали бы одну и ту же величину, если только радиус, плотность и поверхностное натяжение были теми же самыми. Можно при этом добавить, что справедливость такого ответа подтверждается опытом. Но наш критик может не удовлетвориться и этим. Он может спросить, почему мы прежде всего уверены, что среди различных свойств жидкостей, из которых составлена капля, именно поверхностное натяжение одно влияет на период колебания? Ему может казаться весьма возможным, что период зависит от вязкости или сжимаемости, и если нам придется апеллировать к опыту, то какую же цену имеет наш анализ размерностей? На это придется ответить, что конечно мы имеем бо́льшие сведения об эксперименте, чем наш критик, и что при некоторых условиях действительно период колебания зависит от вязкости и сжимаемости помимо поверхностного натяжения. Однако, опыт показывает, что по мере уменьшения радиуса капли достигается такой размер, ниже которого сжимаемость перестает играть какую-либо заметную роль. Точно также ниже определенной вязкости изменение последней заметно не влияет на период колебания капли. Наш анализ применим именно к этим условиям. Вместо апелляции к прямому опыту в подкрепление наших утверждений мы можем, поскольку наш критик довольно сведущ, сослаться на то обобщение опыта, которое содержится в уравнениях гидродинамики. Применяя эти уравнения к нашей задаче, можно показать, что, начиная с некоторых предельных условий, позволительно пренебречь сжимаемостью и вязкостью.

Таким образом, нам удается наконец убедить критика в правильности нашего приема, но для этого понадобится использовать значительные экспериментальные ресурсы и, кроме того, потребуется навык и опытность для правильного суждения. Необученный новичок едва ли оказался бы способным применить метод анализа размерностей к нашей задаче и получить удовлетворительные результаты.

Перейдем к третьей задаче. Даны два тела с массами m_1 и m_2 в пустом пространстве, вращающиеся вокруг общего центра тяжести по круговым орбитам под действием силы взаимного тяготения. Мы хотим знать, каким образом время обращения зависит от других переменных.

Как и прежде составляем таблицу величин.

Таблица 3.

Название величины	*Символ*	*Формула размерности*
Масса первого тела	m_1	M
Масса второго тела	m_2	M
Расстояние между телами	r	L
Время обращения	t	T

Очевидно, этим и ограничиваются все физические величины, связанные с задачей, ибо когда бы и где бы мы ни заставили два тела с массами m_1 и m_2 на расстоянии r совершать круговое движение в пустом пространстве под действием их взаимного тяготения, мы всегда получим одно и то же время обращения независимо от материала, из которого состоят тела, и от их предыдущей химической или динамической истории.

Найдем функциональное соотношение

$$t = f(m_1, m_2, r).$$

Налагаем условие, чтобы это равенство выполнялось независимо от выбора основных единиц. Первый же взгляд на уравнение приводит нас в некоторое смущение, так как в левой части стоит только время, в правой же части времени нет совершенно. Критик за нашей спиной подсказывает: «Но вы включили не все величины, от которых зависит результат, ясно, что вами забыта постоянная тяготения». — «Как это может быть, — возражаете вы, — постоянная тяготения должна появиться сама собою, об этом позаботится природа». Несомненно, что два тела с массами m_1 и m_2 на расстоянии r одно от другого всегда вращаются с одинаковым периодом. Мы включили в таблицу все физические величины, которые могут изменяться. Критик, однако, настаивает на своем; уступая ему, мы вставляем постоянную тяготения в число переменных, чтобы попробовать, что из этого выйдет. Назовем эту постоянную G; очевидно, что ее размерность будет $\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2}$, так как она определяется законом тяготения Ньютона.

Сила тяготения $= G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$.

«Постоянную», имеющую размерность, т. е. меняющую числовую величину при переходе к другой системе основных единиц назовем «размерной» постоянной. Наше функциональное соотношение принимает вид:

$$t = f(m_1, m_2, G, r).$$

Это функциональное уравнение разрешается уже не так просто непосредственным рассмотрением, как два предыдущие; придется немножко заняться алгеброй. Предположим, что функция выражается в форме суммы произведений аргументов в некоторых степенях. Мы знаем, что если обе стороны уравнения должны оставаться равными при любом изменении основных единиц, то размерность любого из произведений в правой части равенства должна быть такой же как и в левой части, т. е. T.

Пусть типичный член суммы произведений имеет вид:

$$m_1^\alpha m_2^\beta G^\gamma r^\delta.$$

Размерность всего произведения должна быть T, т. е.

$$\mathrm{M}^\alpha \mathrm{M}^\beta (\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^3\mathrm{T}^{-2})^\gamma \mathrm{L}^\delta = \mathrm{T}.$$

Приравнивая показатели у L, M и T в правой и левой части, имеем:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ 3\gamma + \delta = 0, \\ -2\gamma = 1, \end{cases}$$

откуда

$$\gamma = -\frac{1}{2}; \quad \delta = \frac{3}{2}; \quad \alpha = -\beta + \frac{1}{2}.$$

Значения α и β полностью не определяются, находится только их отношение, так как у нас только три уравнения при четырех неизвестных. Отношение α к β показывает, что m_1 и m_2 должны входить в форме $m_2^{-1/2}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^x$, причем значение x ничем не ограничивается.

Отсюда

$$f = \sum A_x \frac{r^{3/2}}{G^{1/2}{m_2}^{1/2}} \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^x,$$

где x и A могут иметь произвольные значения.

Вынося $\dfrac{r^{3/2}}{G^{1/2}m_2^{1/2}}$ за знак суммы, можем написать

$$f = \frac{r^{3/2}}{G^{1/2}m_2^{1/2}} \sum A_x \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^x.$$

Выражение под знаком суммы, если x и A_x ничем не ограничены, есть произвольная функция от $\frac{m_2}{m_1}$, которую мы изобразим в виде $\varphi\left(\frac{m_2}{m_1}\right)$.

Отсюда

$$t = \frac{r^{3/2}}{G^{1/2} m_2^{1/2}} \varphi\left(\frac{m_2}{m_1}\right),$$

т. е. квадрат периода обращения пропорционален кубу расстояния между массами и обратно пропорционален постоянной тяготения, если все прочее остается неизменным.

Соображения другого рода позволяют для частных случаев определить вид неизвестной функции φ. Пусть одно из тел обладает очень большой массой, второе же является легким спутником; в этом случае с достаточным приближением можно считать, что центром вращения является центр массивного тела. Ясно, что при этих условиях время обращения не зависит от массы спутника. Если масса спутника удвоится, то удвоится и сила притяжения, следовательно, ускорение, определяемое отношением силы к массе, останется неизменным, т. е. время обращения останется тем же самым. При этих специальных условиях неизвестная функция φ обращается в постоянную величину, и мы найдем

$$t = \text{const} \frac{r^{3/2}}{G^{1/2} m_2^{1/2}}.$$

Это соотношение, как известно, согласуется с астрономическими фактами.

Таким образом, наш критик оказался, по-видимому, правым, настаивая на включении постоянной тяготения в таблицу. У нас остается, однако, неприятное ощущение, поскольку мы не понимаем ясно ошибочности первоначального нашего рассуждения. Нас начинает тревожить предчувствие, что в будущем обнаружится еще какая-нибудь размерная постоянная, которой теперь мы еще не знаем и в отношении которой не будет столь очевидной невозможность пренебрежения, как это было в случае постоянной тяготения. Мы опасаемся, что при таком положении вещей получится неверный ответ, и не знаем, не рухнет ли вообще все строение.

Помимо недоумения с размерными постоянными, последняя задача естественно вызывает и другой вопрос. На каком основании можно предполагать, что неизвестная функция должна быть представлена как сумма произведений независимых переменных в некоторых степенях?

Разумеется, в математике существуют функции, которые нельзя выразить этим способом. Неужели природа ограничила вид действительно существующих функций только той небольшой частью, которая легко усваивается человеком?

Рассмотрим четвертую задачу, разобранную Рэлеем в том же номере Nature. Это знаменитая задача о переносе тепла, которой до Рэлея занимался Буссинек. Твердое тело определенной геометрической формы, но переменных абсолютных размеров, находится в неподвижном состоянии в потоке жидкости и поддерживается при постоянной температуре, превышающей температуру жидкости на некотором расстоянии от тела. Требуется найти скорость переноса тепла от тела к жидкости. Как и прежде, составляем таблицу 4 различных входящих в задачу величин и их размерностей.

Таблица 4.

Название величины	*Символ*	*Формула размерности*
Скорость переноса тепла	h	HT^{-1}
Линейные размеры тепла	a	L
Скорость потока	v	LT^{-1}
Разность температур	θ	θ
Теплоемкость жидкости на единицу объема	c	$\mathrm{HL}^{-3}\theta^{-1}$
Теплопроводность жидкости	k	$\mathrm{HL}^{-1}\mathrm{T}^{-1}\theta^{-1}$

Это первая задача из области теплоты, с которой мы встречаемся, и мы ввели две новых основных единицы, единицу количества тепла (H) и единицу температуры (θ). Заметим, что масса не входит в формулы размерностей ни одной из переменных этой задачи. Если бы мы захотели, ее можно было бы ввести, отказавшись одновременно от H.

Так же, как и в последнем примере предполагаем, что интересующая нас скорость переноса тепла выражается как сумма произведений аргументов в некоторых степенях. Общий вид члена такой суммы имеет вид:

$$\mathrm{const}\ a^{\alpha}\theta^{\beta}\nu^{\gamma}c^{\delta}k^{\varepsilon}.$$

Налагая условие равенства размерности этого произведения размерности h, как и в прежней задаче, получаем четыре уравнения, соответственно четырем основным единицам:

$$\begin{aligned}
\delta + \varepsilon &= 1 \text{ (условие для показателя при H)},\\
\beta - \delta - \varepsilon &= 0 \text{ (условие для показателя при } \theta),\\
\alpha + \gamma - 3\delta - \varepsilon &= 0 \text{ (условие для показателя при L)},\\
-\gamma - \varepsilon &= 1 \text{ (условие для показателя при T)}.
\end{aligned}$$

Для пяти неизвестных мы имеем только четыре уравнения; таким образом одно из неизвестных останется произвольным. Пусть это будет γ.

Разрешая уравнения относительно γ, имеем:

$$\alpha = 1 + \gamma; \quad \beta = 1; \quad \delta = \gamma; \quad \varepsilon = 1 - \gamma,$$

откуда вышенаписанный общий член суммы принимает вид:

$$\mathrm{const}\, a\, \theta\, k \left(\frac{acv}{k} \right)^{\gamma}.$$

Полное решение есть сумма членов такого типа. Как и раньше значения константы и γ ничем не ограничены, поэтому все члены суммы могут быть слиты в единую произвольную функцию, и результат можно записать в таком виде:

$$h = ka\,\theta\, F\left(\frac{acv}{k} \right).$$

Следовательно, скорость переноса тепла пропорциональна разности температур, но от других переменные зависит не вполне определенным образом. Хотя форма функции F неизвестна, однако вид аргумента этой функции дает очень ценные сведения. Например, мы видим, что изменение скорости потока жидкости приводит к такому же точно изменению, как изменение теплоемкости: удвоение скорости жидкости при неизменности прочих переменных оказывает такое же влияние на скорость переноса тепла, как и удвоение теплоемкости жидкости.

Эта задача может также вызвать ряд вопросов. Один из них был поставлен Д. Рябушинским в письме в Nature **95**, 591, 1915 г. Он писал: «В Nature от 18 марта лорд Рэлей дает формулу

$$h = ka\,\theta\, F\left(\frac{acv}{k} \right),$$

рассматривая количество тепла, температуру, длину и время как четыре «независимых» величины.

Если предположить, что только три из этих величин «действительно независимы», мы получим другой результат. Например, если температура определена через среднюю кинетическую энергию молекул, то анализ размерностей позволяет утверждать только то, что

$$h = ka\,\theta\,F\Big(\frac{v}{ka^2},\, ca^3\Big),$$

т. е. вместо неизвестной функции от одного аргумента получается функция от двух аргументов. Конечно, такая функция значительно менее ограничена, чем функция только одного аргумента. Например, в данном случае уже нельзя сделать вывода, что изменение скорости влияет так же, как изменение теплоемкости. Таким образом, замечание Рябушинского существенно.

Рэлей ответил Рябушинскому в том же томе Nature (стр. 644) следующим образом:

«Вопрос, поднятый Рябушинским, относится скорее к логике, чем к способу применения анализа размерностей, интересовавшему меня. Вопрос очень заслуживает дальнейшего рассмотрения. Мое заключение получено на основе обычных уравнений Фурье для теплопроводности, в которых температура и количество тепла принимаются как величины sui generis. Мы имели бы дело с парадоксом, если бы углубление наших знаний о природе тепла в молекулярной теории приводило бы нас к худшему положению, чем раньше при рассмотрении частной задачи. Решение парадокса состоит, по-видимому, в том, что в уравнениях Фурье содержится такое предположение о природе тепла и температуры, которого нет в аргументации Рябушинского».

Я думаю, что этот ответ Рэлея едва ли кого удовлетворит. Разумеется, нет никаких сомнений в искусстве Рэлея в деле получения правильного результата применением анализа размерностей, но найдется ли у нас навык и физическая интуиция Рэлея, чтобы самим также получать правильный результат? Не даст ли некоторое рассмотрение логики метода надежный способ решения вопроса, являются ли температура и количество тепла «действительно» независимыми единицами или нет, и как следует выбирать наши основные величины?

Помимо первого вопроса о надлежащем выборе числа единиц при составлении формул размерностей, эта задача о теплопроводности вызывает и другие вопросы также физического характера. Например, имеем ли мы основание пренебрегать плотностью, вязкостью, сжимаемостью, тепловым расширением жидкости или абсолютной температурой? Вероятно, многие скажут, что такое пренебрежение оправдано, но это утверждение будет основываться на конкретных аргументах и основательных физических сведениях о рассматриваемой физической системе. Проблема не может быть разрешена философом на кафедре, необходимые знания достигнуты когда-то кем-то, запачкавшим свои руки прямым опытом.

В заключение остановимся на пятой задаче, несколько отличного характера. Попробуем найти, как зависит электромагнитная масса электрического заряда, равномерно распределенного по сфере, от радиуса сферы и величины заряда. Полагаем, что заряд расположен в пустом пространстве, и, следовательно, единственными переменными являются заряд и радиус сферы. Применяем прежний метод. Размерность заряда (выраженного в электростатических единицах) получаем из закона Кулона. Таким образом имеем таблицу 5:

Таблица 5.

Название величины	*Символ*	*Формула размерности*
Заряд	e	$\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{L}^{3/2}\mathrm{T}^{-1}$
Радиус сферы	r	L
Электро-магнитная масса	m	M

Напишем

$$m = f(e, r)$$

и найдем вид функции f, основываясь на том, что соотношение должно быть независимым от размера основных единиц. Ясно, что T не может входить в правую часть равенства, так как оно не входит в левую. Но T входит в правую часть только через e, поэтому и e не может входить в правую часть. Однако, если в правой части нет e, то там не может быть и M, так как M входит только через e. Мы встречаемся, таким образом, с противоположными требованиями, делающими решение задачи невозможным. Но снова наш критик-Мефистофель подсказывает, что мы забыли какую-то размерную постоянную. Мы недоумеваем: наша система расположена в пустом пространстве, какой размерной постоянной может характеризоваться пустое пространство? Критик настаивает, однако, на том, что у пустого пространства имеются свойства, и при некоторой настойчивости с нашей стороны подсказывает, что свет распространяется с определенной, характеристической скоростью. Мы снова возвращаемся к задаче, включив в таблицу скорость света c с размерностью LT^{-1}, имеем:

$$m = f(e_1, r_1, c).$$

Прежние затруднения сразу исчезают, и на основе опыта решения предыдущих более сложных примеров мы получаем сразу:

$$m = \mathrm{const}\,\frac{e^2}{rc^2}.$$

Эту формулу мы найдем в любом курсе электродинамики, и, следовательно, наш критик снова оказался прав. Мы чувствуем себя смущенными, не ясно понимая роль размерных постоянных, и несколько успокаиваемся, вспомнив, что c определяет одновременно отношение электростатических единиц к электромагнитным. Однако нам еще не очень ясно, каким образом входит это отношение.

Размышляя о решениях рассмотренных задач, мы встречаемся и с другим вопросом. Почему уравнение, правильно связывающее различные измеримые физические величины, должно по своей форме не зависеть от размера основных единиц? Как будто бы для этого нет никакой необходимости, диктуемой природой самого физического измерения. Всякое уравнение есть описание явления или класса явлений. Оно утверждает в компактной форме, что оперируя определенным предписанным способом так, чтобы получить ряд чисел, описывающих результаты операций, мы должны при подстановке этих чисел в уравнение удовлетворить последнему. Вообразим себя, например, в положении Галилея, пытающегося найти закон падения тел. Материалом для наших наблюдений могут служить все свободно падающие тела на поверхности земли. В качестве измерительного инструмента пользуемся некоторой единицей длины, например метром, и некоторой единицей времени, например минутой. Мы применяем эти единицы по определенным правилам ко всем падающим телам и получаем пары чисел для различных тел, относящихся к пространству, пройденному за некоторое время, протекшее от начала падения. Мы делаем при этом великое открытие, заключающееся в том, что число, выражающее расстояние падения любого тела, любого размера и свойства, находится всегда в постоянном отношении к квадрату числа, выражающего протекшее время. Измеренные числа, вставляемые в это соотношение, были получены при помощи некоторых совершенно определенных единиц. Тем не менее описание верно, и наше открытие очень важно даже при условии, что расстояние и время должны измеряться первоначально избранными частными единицами.

Наше открытие можно записать в виде уравнения:

$$s = \mathrm{const} \cdot t^2.$$

Пусть некто, обитатель другой страны, пользующийся другой системой единиц, столь же ненаучной, как наш метр и минута, прослышав о нашем открытии, воспроизводит опыты со своими измерительными инструментами. Он подтверждает наш результат, но значение постоянной в его уравнении другое. Это значит, что постоянная зависит от размеров примененных единиц, т. е. является размерной постоянной.

Узнав о результатах проверки нашего открытия в другой стране, мы начинаем размышлять. Наконец, мы приходим к выводу, что так и должно быть и не могло быть иначе. Мы беремся предсказать наперед, как изменится постоянная в зависимости от той или иной системы измерений. Если нас начинают расспрашивать о деталях, то мы даем софистический ответ, что мы меняем постоянную так, чтобы в точности компенсировать всякое изменение чисел, представляющих длину или время, в результате получается по существу прежнее уравнение. Если единица длины вдвое меньше первоначальной, так что число, измеряющее некоторое расстояние падения, становится вдвое большим, то мы умножаем постоянную на 2, чтобы компенсировать лишний фактор 2 в левой части уравнения. Точно так же, если единица времени втрое больше первоначальной, т. е. число, выражающее длительность падения, имеет только $\frac{1}{3}$ первоначального значения, постоянную придется умножить на 9, чтобы компенсировать фактор $\frac{1}{9}$, который иначе появился бы в первой части равенства. Иными словами, мы приписываем постоянной размерность LT^{-2} и таким образом получаем формулу, не зависящую от размера основных единиц.

Эта удача ободряет нас, и мы переносим процесс и на другие, более сложные системы. Например, мы наблюдаем высоту приливов в порту, пользуясь для измерения высоты воды футовой линейкой и часом, как единицей времени. В результате многих наблюдений находим, что высота воды может быть представлена формулой:

$$h = 5\sin 0,5066\,t.$$

Мы переписываем это уравнение в такой форме, чтобы всякий другой наблюдатель, применяющий для измерений другую систему единиц, мог ею воспользоваться. Для этого вводим в уравнение две размерные постоянные:

$$hC_1 = 5\sin 0,5066 \cdot C_2 t,$$

где C_1 имеет размерность L^{-1} и C_2 размерность T^{-1}.

Отсюда, естественно, следует обобщение. Любое уравнение, какого угодно вида, правильно воспроизводящее результаты измерений, выполненных при помощи некоторой системы единиц в физической системе, может быть приведено к такому виду, в котором оно верно и для других систем единиц. Для этого к каждой наблюдаемой величине нужно ввести в виде множителя размерную постоянную, размерность которой должна быть обратной по отношению к размерности самой наблюдаемой величины. Числовая величина этой постоянной должна быть такой, чтобы в первоначальной системе единиц она имела значение 1.

Разумеется, во многих случаях форма уравнения может быть такой, что две, или большее число таких размерных постоянных сливаются в один множитель. Вышеприведенный пример падения тела относится к этому случаю. Только что приведенное общее правило требует введения двух размерных постоянных, одной при s слева, другой при t^2 справа; посредством перемножения их можно, однако, слить в одну.

На наш вопрос получен ответ, мы видим, что всякое уравнение можно привести к такому виду, что оно выполняется независимо от размеров основных единиц. Наша неуверенность в отношении размерных постоянных от этого не становится, однако, меньшей. Не существуют ли свои размерные постоянные для каждого типа задач и как можно сказать наперед с какой размерной постоянной мы встретимся? Положение кажется еще более безнадежным, чем сначала; мы могли с грехом пополам понять, почему гравитационная постоянная должна входить в задачу о двух вращающихся телах, можно согласиться с некоторым подобием обоснования при внесении скорости света в задачу об электромагнитной массе, но несомненно очень трудно открыть общее основание или способ предсказания для присутствия или отсутствия размерных постоянных в качестве множителей у измеряемых величин.

Решая наши задачи, мы встретились еще с одним обстоятельством, требующим пояснений. Мы заметили, что каждая формула размерности измеряемой величины содержит основные единицы в виде произведения этих единиц в степенях. Насколько это необходимо, и могут ли существовать другие формулы размерности для количеств, измеряемых другим способом, а если так, то как следует применять наши методы к таким количествам?

В итоге, в этой вводной главе мы натолкнулись на ряд важных вопросов, на которые следует дать ответ, прежде чем у нас образуется уверенность в правильности результатов, получаемых методами анализа размерностей. Эти вопросы следующие:

Прежде всего, когда входят размерные постоянных и каков их вид?

Насколько необходимо, чтобы формула размерности любого измеряемого количества являлась произведением основных единиц в соответствующих степенях?

В чем смысл величин, не имеющих размерностей?

Могут ли функции, описывающие явления, ограничиваться классом сумм произведений некоторых переменных в степенях?

Какого рода количества должны выбираться в виде основных, при помощи которых осуществляется измерение других количеств? В частности, сколько должно быть видов основных единиц? Правильно ли уменьшать насколько возможно число основных единиц введением определений в соответствии с экспериментальными фактами?

Наконец, в чем состоит критерий пренебрежения некоторыми переменными в задаче, например вязкостью в задаче о теплопроводности, и каков характер получаемого результата? Является ли он приближенным или точным? Если результат приближенный, то каково это приближение?

Глава 2
Формулы размерности

В вводной главе рассмотрено несколько отдельных задач, возбудивших ряд вопросов, на которые необходимо ответить, прежде чем стремиться к действительному овладению методом анализа размерностей. Мы приступим теперь к последовательному изложению предмета, помня поставленные вопросы и постепенно на них отвечая.

Цель анализа размерностей дать некоторые сведения о соотношениях, существующих между измеримыми величинами, связанными с различными явлениями. Преимущество метода в его быстроте; он избавляет от необходимости производить полный анализ задачи, нет надобности, например, выписывать уравнения движения механической системы. С другой стороны, анализ размерностей дает далеко не все сведения, которые могут быть получены при детальном рассмотрении.

Рассмотрим прежде всего природу соотношений между измеримыми величинами, интересующими нас. Оперируя с некоторым явлением или группой явлений, мы применяем наш метод, приблизительно, так: сначала мы измеряем некоторые количества, в отношении которых есть основания считать их важными при описании явлений. Эти измеряемые величины — различного рода; для каждой величины мы имеем особые правила для измерения, т. е. для сопряжения их с некоторыми числами. Получив достаточное количество таких измеренных чисел, мы ищем связи между найденными величинами. Если мы достаточно опытны и удачливы, то находим соотношения, которые можно выразить в математической форме. Обыкновенно особенно интересна одна из величин, которую и пытаются выразить как функцию остальных. Иначе говоря, мы ищем соотношения:

$$x_1 = f(x_2, x_3, \ldots),$$

где x_1, x_2 и т. д. — числа, выражающие различные измеренные физические величины. Так, например, x_1 может соответствовать скорости,

x_2 — вязкости и т. д. Для краткости этот довольно длинный оборот речи можно заменить условным утверждением, что x_1 — скорость, в действительности это не так, это только число, измеряющее скорость.

Первое замечание, которое следует сделать в отношении функционального соотношения типа написанного, состоит в том, что аргументы распадаются на две группы в зависимости от способа, которым эти числа получены фактически. Первую группу количеств мы назовем *первичными* или основными. Это те количества, которые соответственно специальным правилам операций, сопрягающим числа с явлениями, рассматриваются как основные и обладают несводимой более степенью простоты.

Так в обычной системе механики основными первичными величинами являются масса, длина и время. В функциях рассматриваемого вида некоторые аргументы могут быть числами, являющимися мерой длин, масс или времен. Мы условимся называть такие величины первичными.

При измерении первичных количеств должны существовать некоторые правила операций, устанавливающие физическую процедуру, посредством которой возможно измерять длину при помощи специальной длины, избираемой в качестве единицы, или время при помощи специального интервала времени, избираемого стандартом. Вообще для первичных величин характерно, что существуют правила, посредством которых первичная величина непосредственно измеряется единицами того же рода. Легко убедиться, что при выборе таких правил мы молчаливо налагаем некоторое требование. Например, при измерении длины это требование при замене первоначальной единицы длины, скажем, половинной единицей сводится к тому, чтобы числа, представляющие меру любой конкретной длины в новых единицах, были вдвое больше первоначальных чисел. Методологии систем измерений до сих пор уделялось очень мало внимания; я не знаю, например, формулировалась ли когда-либо только что приведенная характеристика всех наших систем измерения. Из рассмотрения любой практически применяемой системы измерений очевидно, однако, что указанное свойство имеет место. Наличие этого свойства связано с чрезвычайно важным следствием, состоящем в том, что отношение чисел, выражающих измерения, например, двух конкретных длин, не зависит от размера единицы, при помощи которой произведено измерение. Это следствие, несомненно, сразу очевидно, ибо, меняя размер основной единицы в n раз, мы, согласно сделанной гипотезе, меняем меру каждой длины в $\frac{1}{n}$ раз и таким образом оставляем неизменным отношение мер любых двух длин. Это значит, что отношение длин двух произвольных предметов имеет абсолютное значение, независимое от размера единиц. Справедливо и обратное заключение, как это явствует после небольшого размышления. Если мы требуем, чтобы наша система измерений первичных количеств посредством единиц того же вида была такой, чтобы отношение мер двух любых объектов не зависело от размера единиц, в таком случае меры конкретных объектов должны изменяться обратно пропорционально размерам единицы.

Помимо первичных величин существует другая группа величин, которые можно назвать *вторичными.* Их числовые значения не получаются операцией непосредственного сравнения с другой величиной того же вида, принимаемой за единицу; метод измерения в этом случае окольный и более сложный. Вторичные величины измеряются посредством промера некоторых первичных величин, связанных с рассматриваемыми, согласно правилам, дающим число, определяемое как мера данной вторичной величины. Например, скорость обычно определяется как вторичная величина. Мы получаем ее меру, измеряя длину и время (т. е. две первичных величины), соответствующее данной длине, и разделяя число, измеряющее длину на число, измеряющее время (или, условно говоря, разделяя длину на время).

Существует некоторое ограничение в отношении тех правил операций, которыми мы свободно можем распоряжаться при определении вторичных величин. Мы налагаем то же самое требование как и на первичные величины, т. е. отношение чисел, измеряющих любые два конкретных образца вторичной величины, должно не зависеть от размера основных единиц, применяемых при выполнении требуемых первичных измерений. Если, скажем, одно вещество обладает вязкостью вдвое большей чем другое, и один автомобиль движется втрое скорее другого, то это утверждение должно иметь абсолютное значение независимо от размера основных, первичных единиц.

Это требование не является необходимым для производства измерений вообще. Любые правила операций могут служить основанием системы измерений, сопрягающих числа с явлениями таким образом, чтобы своеобразие данного явления однозначно определялось числом в связи с правилами операций. Однако требование постоянства отношения, или, как можно сказать, *абсолютного значения относительно-*

го количества, существенно для всех систем измерений, применяемых в науке. Анализ размерностей не применим к системам, не удовлетворяющим этому требованию, поэтому в этой книге мы рассматривали только такие системы.

Следует в особенности заметить, что линия раздела между первичными и вторичными величинами не является резкой и раз и навсегда установленной естественными условиями; она в значительной степени произвольна и зависит от того или иного ряда правил операций, которые мы находим удобными принять, определяя нашу систему измерения. Например, в нашей обычной системе механики сила является вторичной величиной, и мера ее получается перемножением числа, измеряющего массу на число, измеряющее ускорение (которое и само является вторичной величиной). Но физически сила вполне достойна занимать место первичной величины, потому что мы понимаем смысл утверждения, что одна сила вдвое больше другой, и нам известен процесс, при помощи которого сила может измеряться при помощи единицы ее же собственного вида. То же самое можно сказать относительно скорости: возможно найти способ непосредственного сложения скоростей и таким образом измерять скорость единицами ее собственного вида, т. е. возможно рассматривать скорость как первичную величину; можно, пожалуй, усомниться в том, что любая физическая величина пригодна в случае надобности и удобства в качестве первичной. Сразу, например, неясно, можно ли придумать физические приемы для непосредственного сравнения двух вязкостей без измерения величин другого рода?

Но этот вопрос не существенен для дальнейшего и не должен нас задерживать, хотя сам по себе он очень интересен. Констатируем только, что сопряжение чисел с измеряемыми количествами требует некоторой системы правил операций такого рода, что величины распадаются на две группы, которые мы называем первичными и вторичными.

Мы говорили уже, что требование «абсолютного значения относительной величины» налагает определенные ограничения на операции, посредством которых вторичные величины могут быть измерены через первичные. Формулируем это ограничение аналитически. Назовем первичные величины, при помощи которых измеряются вторичные, через α, β, γ и т. д. Измерения первичных величин комбинируются определенным образом так, чтобы получилась мера вторичной величины. Представим эту комбинацию функциональным символом f, полагая, следовательно, что вторичная величина $= f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$. Если имеются два конкретных образца вторичной величины, то связанные с ними первичные величины имеют различные численные значения. Обозначим значения, связанные с первым образцом, индексом 1, со вторым — индексом 2. Тогда $f(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots)$ будет мерой первого образца, $f(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots)$ — мерой второго. Изменим теперь размер основных единиц. Возьмем единицу, измеряющую α, в x раз меньшей. Тогда, как мы видели, число, измеряющее α, будет в x раз больше, или $x\alpha$. Точно также возьмем единицу, измеряющую β в y раз меньшей, и соответствующее число станет равным $y\beta$. Поскольку правило операции, посредством которого численное значение вторичной величины получено из первичных величин, не зависит от размера первичных единиц, число, измеряющее вторичную величину, делается теперь равным $f(x\alpha, y\beta, \ldots)$. Мерами двух конкретных образцов вторичного количества теперь будут $f(x\alpha_1, y\beta_1, \ldots)$ и $f(x\alpha_2, y\beta_2, \ldots)$.

Наше *требование абсолютного значения относительной величины* аналитически выразится так:

$$\frac{f(\alpha_1, \beta_1, \ldots)}{f(\alpha_2, \beta_2, \ldots)} = \frac{f(x\alpha_1, y\beta_1, \ldots)}{f(x\alpha_2, y\beta_2, \ldots)}.$$

Это отношение должно быть справедливым для любых значений α_1, $\beta_1, \ldots, \alpha_2, \beta_2, \ldots$ и $x, y, z, \ldots$

Мы хотим отсюда найти вид неизвестной функции f. Перепишем нашу формулу в таком виде:

$$f(x\alpha_1, y\beta_1, \ldots) = f(x\alpha_2, y\beta_2, \ldots) \times \frac{f(\alpha_1, \beta_1, \ldots)}{f(\alpha_2, \beta_2, \ldots)}.$$

Дифференцируя по x и обозначая через f_1 частную производную относительно первого аргумента и т. д., имеем:

$$\alpha_1 f_1(x\alpha_1, y\beta_1, \ldots) = \alpha_2 f_1(x\alpha_2, y\beta_2, \ldots) \times \frac{f(\alpha_1, \beta_1, \ldots)}{f(\alpha_2, \beta_2, \ldots)}.$$

Положим теперь x, y, z и т. д. равными 1, тогда

$$\alpha_1 \frac{f_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots)}{f(\alpha_1, \beta_1, \ldots)} = \alpha_2 \frac{f_1(\alpha_2, \beta_2, \ldots)}{f(\alpha_2, \beta_2, \ldots)}.$$

Эта формула должна выполняться для любых значений α_1, β_1, ... и α_2, β_2, ...

Отсюда, полагая α_2, β_2, ... постоянными и позволяя α_1, β_1, ... изменяться, имеем:

$$\frac{\alpha}{f}\frac{df}{d\alpha} = \text{const}$$

или

$$\frac{1}{f}\frac{df}{d\alpha} = \frac{\text{const}}{\alpha},$$

откуда интегрированием находим:

$$f = C_1 \alpha^{\text{const}}.$$

Множитель C_1 есть функция других переменных β, γ, ...

Этот прием можно повторить, частично дифференцируя относительно y, z, ... и затем интегрируя.

Окончательный результат, очевидно, будет:

$$f = C\alpha^a \beta^b \gamma^c \ldots,$$

где a, b, c, ... и C — постоянные.

Таким образом, *каждое вторичное количество, удовлетворяющее условию абсолютного значения относительной величины, должно выражаться как некоторая постоянная, умноженная на первичные величины в некоторых степенях.* Мы уже говорили, что только вторичные величины такого рода применяются в научных измерениях, величины иного характера здесь не рассматриваются.

Итак, мы ответили на один из вопросов вводной главы: почему в формулах размерностей основные единицы входят всегда как произведения в степенях?

Ясно, что операции, посредством которых вторичная величина измеряется при помощи первичных, математически определены коэффициентом C и показателями степеней различных первичных величин. Для упрощения коэффициент почти всегда полагается равным единице, хотя нет необходимости именно для такого выбора. Существуют системы, имеющие применение, в которых коэффициент не всегда приравнивается единице. Например, так называемые рациональные и обычные электростатические единицы отличаются множителем $\sqrt{4\pi}$. Такое различие в числовом коэффициенте не существенно и всегда легко учитывается, но степенные показатели имеют основное значение. *Степенной*

показатель первичной величины по определению является «размерностью» вторичной величины в отношении данной первичной.

«Формула размерности» вторичной величины есть совокупность показателей различных первичных величин, фигурирующих в правилах операций, при помощи которых измеряется вторичная величина. Во избежание путаницы показатели ставятся всегда при символах тех первичных величин, к которым они относятся в виде степеней.

Например, скорость измеряется, по определению, делением некоторой длины на некоторое время (не следует забывать, что в действительности это означает деление числа, являющегося мерой некоторой длины на число — меру времени). Поэтому экспонент длины $+1$ и экспонент времени -1, а вся формула размерности имеет вид LT^{-1}. Сила в обычной ньютоновой механике определяется как масса, умноженная на ускорение. Размерность силы поэтому равна массе, умноженной на размерность ускорения. Размерность ускорения получается из его определения как изменения скорости в единицу времени, т. е. равна LT^{-2}. Отсюда размерность силы будет MLT^{-2}.

Заметим, что размерность любой первичной величины на основании простого обобщения определения совпадает с символом этой первичной величины.

Нужно особо отметить, что размерность первичной величины на основании данного определения не имеет абсолютного значения и определена только применительно к тем правилам операций, посредством которых мы получаем числа, сопряженные с физическим явлением, формула размерностей не обязательно даже должна указывать существенные стороны правил операций. Например, в формуле размерности силы как произведения массы на ускорение не содержится указания на то, что сила и ускорение суть векторы, и что сравниваются их компоненты в одном и том же направлении. Более того, правила операций при действительных измерениях находятся в нашей власти и могут изменяться, и мы, разумеется, поступили бы неразумно, не меняя их в зависимости от преимуществ, представляемых специальным характером данной физической системы или проблемы. В последующем изложении мы встретимся со многими задачами, в которых выгодно выбрать особую систему измерений, т. е. правил операций. Различные системы измерения могут отличаться как по характеру величин, которые удобно считать первичными и определяющими другие, так и по числу величин, избираемых в качестве первичных. Все зависит от характера задачи, и наша обязанность — выбрать систему, наилучшим образом приспособленную к задаче.

Бессмысленно поэтому говорить: «такая-то размерность физической величины», если одновременно не указана система измерений, в отношении к которой определена размерность. Это не всегда ясно даже тем, кто при других условиях признает относительную природу формул размерности. Например, Бэкингэм в Physical Review, **4**, 357, 1914 г., говорит: «Рассуждение Тольмана основано на предположении, что абсолютная температура имеет размерность энергии, что недопустимо». Тольман допускает правильность такой точки зрения. (Physical Review, **6**, 226, 1915 г., примечание). Я полагаю, что Тольман имеет право положить размерность температуры равной размерности энергии, если только это совместимо с физическими фактами (как это, по-видимому, имеет место) и удобно.

Эта точка зрения на природу формулы размерности противоречит общепринятой и часто высказываемой. Многие думают, что формулы размерностей имеют некий сокровенный смысл, связанный с «последней сущностью» предмета, и что, написав формулу размерности, мы несколько ближе подходим к постижению этой сокровенной сущности. С этой точки зрения в формуле размерностей есть что-то абсолютное, и слова вроде «реальной независимости» в возражениях Рябушинского Рэлею по поводу задачи о теплопроводности (гл. 1) приобретают смысл. С этой точки зрения важно найти истинную размерность, а если таковая найдена, то возникает надежда обнаружить нечто новое относительно физических свойств системы. Для такого воззрения возможность существования двух формул размерности для одной и той же физической величины является чуждой. Примирения с фактами ищут на пути введения так называемых скрытых размерностей. Спекуляции такого рода были особенно в моде в связи с природой эфира, но, насколько я знаю, никогда за этим не следовало никакого физического открытия, мы и не можем его ожидать, если только наш взгляд правилен.

В приложении к этой главе приведен ряд цитат, характеризующих эту точку зрения, или близких к ней.

Приложение к главе 2

Цитаты, иллюстрирующие различные распространенные точки зрения на природу формул размерности

Р. Тольман (Phys. Rev. **9**, 251, 1917): «... наша идея о размерности величины, как о сжатой формулировке ее определения и, следовательно, как о выражении существенных черт ее физической природы».

А. Рюкер (Philosophical Magazine 27, 104, 1889): «При вычислении размерностей физических величин мы нередко встречаемся с неопределенными уравнениями с двумя и большим числом неизвестных. В таких случаях нужно сделать добавочное предположение, которое состоит обыкновенно в том, что одна из величин есть отвлеченное число. Иными словами, эта величина не имеет размерности.

Размерности зависимых между собою единиц, выводимые на основе такого предположения, очевидно искусственны в том смысле, что они не обязательно обнаруживают свою истинную связь с длиной, массой и временем. Они могут служить для проверки правильности обеих частей уравнения, но не указывают на механическую природу производных единиц, к которым они относятся. По этой причине смысл их часто неясен».

В. Вильямс (Phil. Mag. **34**, 234, 1892): «Искусственность этих систем (электростатической и электромагнитной) явствует из того, что каждая из них как будто бы выражает абсолютные размерности различных величин в терминах L, M и T. Между тем мы ожидаем, что абсолютная размерность физической величины может быть только единственной. Из закона для механической силы между двумя полюсами мы получаем:

$$f = \frac{1}{\mu}\frac{m^2}{r^2} \quad \text{или} \quad m = r\sqrt{\mu f},$$

что имеет как качественное, так и количественное значение, и стало быть, должно иметь место равенство размерностей обеих сторон. Таким способом мы получаем две различные абсолютные размерности для одной и той же физической величины, причем каждая допускает свою физическую интерпретацию.

Формула размерности физической величины выражает численную зависимость единицы данной величины от первичных и вторичных единиц, из которых она выведена. Показатели различных единиц в формуле и называются размерностью величины в отношении к этим единицам. В этом узком смысле формулы указывают только численные связи между различными единицами. Возможно, однако, рассматривать вопрос и с более широкой точки зрения, как было указано в статье профессора Рюкера. Формулы размерности могут интерпретироваться как выражение физических тождеств различных величин, как показатель наших представлений об их физической природе (разумеется, в терминах других, более основных представлений), они построены также как химические формулы, указывающие состав и химическое тождество. Такая точка зрения более глубока и фундаментальна, и примитивное числовое значение формул размерности, как простого отношения между единицами, становится второстепенным.

Возникает вопрос, как удостовериться в правильности выражения физической величины? Узнать это возможно по (внутреннему) строению единицы данной величины из основных единиц L, M и T, а не только по изменению величины в зависимости от этих единиц.

То, что формулы размерности действительно рассматриваются с этой более высокой точки зрения как нечто большее, чем простые «отношения изменения» между единицами, видно из ощущения затруднения, когда размерности двух различных величин, например момента и работы, совпадают».

С. Томпсон. Элементарные уроки по электричеству и магнетизму стр. 352: «Кажется бессмысленным, что могут быть две различные единицы электричества».

Р. Фессенден. (Phys. Rev. 10, 8, 1900): «Различие между формулой размерности и качественной формулой или качеством некоторой вещи состоит согласно определениям выше цитированных авторов в том, что размерности «произвольны», «являются только результатом определения и полностью зависят от принятой системы единиц». Между тем качество есть выражение абсолютной природы, оно никогда не меняется при любой системе единиц. Для того, чтобы это было так, мы не должны пренебрегать ни одним качеством».

Глава 3
О применении формул размерности при изменении единиц

Мы видели в последней главе, как получаются формулы размерности некоторой величины при помощи величин, избранных по определению первичными. Наш метод анализа показал также связь между числовым значением производной величины и величин первичных. Если, например, длина входит в формулу размерности в первой степени, то мы знаем, что число, измеряющее эту величину, удваивается, если единица длины уменьшается вдвое; иначе говоря, числовые меры находятся в обратном отношении к размеру единицы, возведенной в степень, указанную в формуле размерности.

Рассмотрим конкретный пример. Каково будет численное значение скорости 88 футов в секунду, если ее выразить через мили в час. Формула размерности скорости — LT^{-1}. Если единица длины увеличивается в отношении мили к футу, т. е. $5280 : 1$, то скорость надо умножить на $\frac{1}{5280}$, так как длина входит в формулу размерности в первой степени. Точно также, если единица времени увеличена в отношении часа к секунде, т. е. как $3600 : 1$, то скорость должна быть умножена на 3600, ибо время входит в формулу размерности в степени -1. Для перехода от футов в секунду к милям в час мы должны, следовательно, умножить числовую величину скорости на $\frac{3600}{5280}$, в нашем случае скорость выразится как $\frac{88 \times 3600}{5280} = 60$ миль в час.

Результат этих действий может быть значительно концентрирован и упрощен по виду следующей записью:

$$88\,\frac{\text{футы}}{\text{сек.}} = 88 \times \frac{1\ \text{фут}}{1\ \text{сек.}} = 88 \times \frac{1/5280\ \text{мили}}{1/3600\ \text{часа}} = 88\,\frac{3600}{5280}\,\frac{\text{мили}}{\text{часы}} = 60\,\frac{\text{мили}}{\text{часы}}.$$

Несколько вдумываясь в связь формулы размерности с действиями, посредством которых получаются числа, измеряющие любую физическую величину, мы сразу видим, что указанный прием является общим. Можно получить любое новое значение в новых единицах из прежних значений, применяя формулу размерности точно тем же способом.

Этот метод применения формул размерности часто весьма удобен и является простейшим и наиболее надежным способом изменения единиц из тех, которые мне известны.

Оперируя таким образом с формулами размерности, мы приписываем им некоторую вещественность, подставляя вместо символа первичной единицы конкретную применяемую единицу и заменяя ее другой, ей физически эквивалентной. Иначе говоря, мы обращаемся с формулой размерности так, как будто бы она изображает операции, действительно произведенные над физическими предметами, как будто бы мы взяли определенное число футов и поделили его на определенное число секунд. Разумеется, на самом деле все это не делается. Не имеет смысла говорить о делении длины на время; в действительности мы оперируем с числами, являющимися мерой этих величин. Этот условный способ выражения позволителен, однако, в том случае, если он дает значительные преимущества; не следует, впрочем, думать, что при этом мы оперируем с физическими предметами не символически, а как-нибудь иначе[1].

Это свойство формул размерностей указывать изменение числового значения в каждом конкретном случае, когда изменяется размер первичных единиц, позволяет формулировать следующую точку зрения на природу формулы размерности, высказанную наиболее пространно Джемсом Томсоном в Трудах Британской ассоциации за 1878 г. стр. 451. Его взгляд согласуется с формулированным выше в следующем: не имеет смысла говорить буквально, что, например, скорость равна длине, деленной на время. Мы не можем производить алгебраические операции над физическими длинами, точно также как мы никогда не можем разделить что-нибудь на физическое время. Джемс Томсон предпочитает заменить выражение: скорость $= \frac{\text{длина}}{\text{время}}$ более пространным утверждением:

$$\text{изменение отношения скоростей} = \frac{\text{изменение отношения длин}}{\text{изменение отношения времен}}.$$

Разумеется, Томсон не стал бы настаивать на применении этого длинного и неуклюжего выражения на практике, но договорившись

[1] D. L. Webster, Science **46** 187, 1917: O. Lodge, Nature **38**, 281, 1888.

один раз и навсегда, разрешил бы нам писать формулы размерности привычным способом.

Такая точка зрения кажется вполне возможной, а в отношении результатов ее нельзя отличить от взглядов, изложенных мною. Однако, мне кажется, что рассматривать символы формул размерности, как напоминание о правилах операций, физически примененных при получении числовой меры величины, — это значит удерживать несколько более тесную связь с действительной физикой положения. Считать символы формул размерности только представителями множителей, применяемых при изменении одних единиц на другие, есть в большей или меньшей степени софизм, непосредственно не интересующий нас при первом ознакомлении с явлением.

Помимо класса изменения единиц, рассмотренного выше, где изменяются только размеры первичных единиц, нужно рассмотреть и другой класс изменения, в котором первичные единицы меняются не только по размеру, но и по характеру[1]. Например, в нашей обычной системе единиц ньютоновой механики мы считаем первичными единицами массу, длину и время, между тем хорошо известно, что мы с равным правом можем считать первичными силу, длину и время. Таким образом можно встретиться, например, с задачей такого рода: как выразить кинетическую энергию в 10 *г см*^{2} *сек.*$^{-2}$ в системе, в которой единицами являются: *дина, см* и *сек.*?

Здесь очевидно переплетаются две задачи. Одна состоит в том, чтобы найти формулу размерности кинетической энергии относительно силы, длины и времени, другая заключается в нахождении нового значения числового коэффициента для той частной системы, в которой единица силы есть дина, единица длины — сантиметр и единица времени — секунда.

Преобразованная формула размерности получается легко, если рассмотреть последовательные стадии перехода от одной системы к другой. Переход, разумеется, должен производиться таким образом, чтобы две системы были совместны одна с другой. Так, если сила равна массе, умноженной на ускорение в одной системе, она должна равняться тому же произведению и в другой системе. Если бы это было не так, мы имели бы дело только с формальным изменением, и величина, называемая силой в одной системе, не соответствовала бы тому же само-

[1] A. Buchholz. Annalen der Physik, 51, 678, 1916.

му физическому комплексу в другой системе. Эта связь силы и массы в двух системах выполняется применением простой алгебры. В первой системе мы определяем силу как массу, умноженную на ускорение, во второй — масса определяется как сила, деленная на ускорение. Таким образом, вторичная величина в каждой системе выражается через первичные величины системы и обе системы совместны.

Правильное соотношение между формулами размерности двух систем можно просто установить следующим образом: составляется формула размерности в первой системе и разрешается относительно величины, которая во второй системе считается вторичной.

В нашем частном случае

$$\begin{aligned} \text{в первой системе}:\ \text{сила} &= \mathrm{MLT^{-2}}, \\ \text{во второй системе}:\ \text{масса} &= \mathrm{FL^{-1}T^{2}}. \end{aligned}$$

Преобразование числового значения происходит точно так же, как и в рассмотренном примере, если считать символы размерности названия истинных величин и величину, подлежащую исключению, заменить ее значением в новых единицах. Полное решение имеет, следовательно, такой вид:

$$10\frac{1\ \textit{г}\ (1\ \textit{см})^2}{(1\ \textit{сек.})^2} = ?$$

Нам нужно прежде всего знать размерность 1 *г* в единицах *дина, см* и *сек.*

Имеем:

$$1\textit{дина} = \frac{1\ \textit{г}\ 1\ \textit{см}}{(1\ \textit{сек.})^2},$$

т. е.

$$1\ \textit{г} = \frac{1\ \textit{дина}\ (1\ \textit{сек.})^2}{1\ \textit{см}}.$$

Откуда:

$$10\,\frac{1\ \textit{г}\ (1\ \textit{см})^2}{(1\ \textit{сек.})^2} = 10\,\frac{1\ \textit{дина}\ (1\ \textit{сек.})^2}{1\ \textit{см}} \times \frac{(1\ \textit{см})^2}{(1\ \textit{сек.})^2} = 10\ \textit{дин. см.}$$

Результат — в правильности которого мы убеждаемся непосредственно.

Рассмотрим теперь общий случай, когда нам нужно от системы с основными единицами X_1, X_2, X_3 перейти к системе с основными единицами Y_1, Y_2, Y_3.

Прежде всего нужно найти формулы размерности Y_1, Y_2, Y_3 в единицах X_1, X_2, X_3.

Пусть размерность Y_1 будет a_1, a_2, a_3; Y_2 — b_1, b_2, b_3; Y_3 — c_1, c_2, c_3 относительно X_1, X_2, X_3.

В каждом определенном случае можно написать:

$$\begin{aligned} C_1Y_1 &= X_1^{a_1}X_2^{a_2}X_3^{a_3}, \\ C_2Y_2 &= X_1^{b_1}X_2^{b_2}X_3^{b_3}, \\ C_3Y_3 &= X_1^{c_1}X_2^{c_2}X_3^{c_3}, \end{aligned}$$

где C — числовые множители. Эти уравнения необходимо разрешать относительно X.

Логарифмируем:

$$\begin{aligned} a_1 \lg X_1 + a_2 \lg X_2 + a_3 \lg X_3 &= \lg C_1Y_1, \\ b_1 \lg X_1 + b_2 \lg X_2 + b_3 \lg X_3 &= \lg C_2Y_2, \\ c_1 \lg X_1 + c_2 \lg X_2 + c_3 \lg X_3 &= \lg C_3Y_3. \end{aligned}$$

Это легко разрешимые линейные уравнения относительно логарифмов.

Для X_1 получаем

$$X_1 = (C_1Y_1)^{\frac{\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}} (C_2Y_2)^{\frac{\begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}}{\Delta}} (C_3Y_3)^{\frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}}{\Delta}}.$$

В этом решении Δ обозначает детерминант:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Значения X_2 и X_3 получаются круговой подстановкой.

Рассмотрим пример. Какое значение примет количество движения в 15 *тонн* (масса), умноженных на $\frac{\text{милю}}{\text{час}}$ в системе, основными единицами которой являются 2 HP (лошадиных силы), 3 фута в сек. и 5 эрг. Это достаточно сложный случай.

Обозначим:

$$Y_1 = 2\,\mathrm{HP} = 2 \times 33\,000\,\frac{1 \text{ фунт (сила) } 1 \text{ фут}}{1 \text{ мин.}};$$

$$Y_2 = 3\,\frac{\text{фут}}{\text{сек.}}; \quad Y_3 = 5 \text{ эрг.}$$

Сначала нужно перевести фунты (силы) в фунты (массы). Фунт силы это есть сила, сообщающая массе в один фунт ускорение в $32,17\,\frac{\text{фут}}{\text{сек.}^2}$.

Т. е.

$$1 \text{ фунт (силы)} = 32,17\,\frac{1 \text{ фунт (массы) } 1 \text{ фут}}{(1 \text{ сек.})^2}.$$

Далее:

$$Y_1 = 66\,000 \cdot 32,17 \frac{1 \text{ фунт (массы) } 1 \text{ фут.}}{(1 \text{ сек.})^2} \cdot \frac{1 \text{ фут}}{1 \text{ мин.}} =$$

$$= 32,17 \cdot 66\,000\,\frac{\frac{1}{5280}\text{тонны}\left(\frac{1}{5280}\text{ мили}\right)^2}{\left(\frac{1}{3600}\text{ час.}\right)^2 : \frac{1}{60}\text{час.}} = 2,962 \cdot 10^4\,\frac{\text{тонн} \cdot \text{миль}^2}{\text{час}^3}$$

или в обычной форме

$$3,380 \cdot 10^{-5} Y_1 = \text{тонны}^{-1}\text{мили}^2\text{часы}^{-3}.$$

Точно также

$$Y_2 = 3\,\frac{\text{фут}}{\text{сек.}} = 3\,\frac{\frac{1}{5280}\text{ мили}}{\frac{1}{3600}\text{ сек.}} = \frac{45 \text{ мили}}{22 \text{ часы}}$$

или

$$0,4889 Y_2 = \text{тонны}^0 \text{ мили}^1 \text{ часы}^{-1}.$$

Точно также

$$Y_3 = 5 \text{ эрг} = 5\,\frac{1\ \textit{г}\ (1\ \textit{см})^2}{(1\ \textit{сек.})^2} = 5\,\frac{2,103 \cdot 10^{-6}\text{тонн}^{-6}(6,214 \cdot 10^{-6}\text{мили})^2}{\left(\frac{1}{3600}\text{ час}\right)^2}$$

или

$$3,622 \cdot 10^8 Y_3 = \text{тонны}^1\ \text{мили}^2\ \text{часы}^{-2}.$$

Перепишем еще раз нашу систему уравнений:

$$\begin{aligned}
3,380 \cdot 10^{-5}\, Y_1 &= \text{тонны}^1\ \text{мили}^2\ \text{часы}^{-3},\\
0,4889\, Y_2 &= \text{тонны}^0\ \text{мили}^1\ \text{часы}^{-1},\\
3,622 \cdot 10^8\, Y_3 &= \text{тонны}^1\ \text{мили}^2\ \text{часы}^{-2}.
\end{aligned}$$

Решаем уравнения относительно тонн, миль и часов, выражая их через Y_1, Y_2, Y_3.

Найдем сначала детерминант показателей:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1.$$

Получаем очень отрадный простой результат.

На основании общего метода решения имеем:

$$\begin{aligned}
1\,\text{тонна} &= (3,380 \times 10^{-5}\, Y_1)^0\ \ (0,4889\, Y_2)^{-2}\, (3,622 \times 10^8\, Y_3)^{+1},\\
1\,\text{миля} &= (\quad » \quad)^{-1} (\quad » \quad)^{+1} (\quad » \quad)^{+1},\\
1\,\text{час} &= (\quad » \quad)^{-1} (\quad » \quad)^{0}\ (\quad » \quad)^{+1},
\end{aligned}$$

или, упрощая, находим:

$$\begin{aligned}
1\,\text{тонна} &= 15,16 \cdot 10^8\, Y_2^{-2} Y_3,\\
1\,\text{миля} &= 5,223 \cdot 10^{12}\, Y_1^{-1} Y_2 Y_3,\\
1\,\text{час} &= 1,069 \cdot 10^{13}\, Y_1^{-1} Y_3.
\end{aligned}$$

Окончательно получаем:

$$15\,\frac{\text{тонны мили}}{\text{часы}} = 15 \cdot \frac{15,16 \times 5,223 \times 10^{20}}{1,069 \times 10^{13}} \cdot \frac{Y_2^{-2} Y_3 Y_1^{-1} Y_2 Y_3}{Y_1^{-1} Y_3} =$$

$$= 1,112 \times 10^{10}\, Y_2^{-1} Y_3 = 1,112 \times 10^{10}\, \frac{5\ \text{эрг}}{\text{фут}/(3\ \text{сек.})}.$$

В этом и состоит искомый ответ. Заметим, что в результате содержатся только две новых единицы вместо трех, выпало «2 НР». Разумеется, это возможно только в частном случае. Можно было бы думать, что этим обстоятельством следовало воспользоваться для сокращения вычислений; это однако не так, все множители, связывающие тонну, милю и час с новыми единицами, фигурируют в результате.

Следует сделать два замечания по поводу указанных преобразований. Во-первых, не всегда возможен переход от одной системы единицы к другой, необходимо, чтобы выполнялось определенное условие. Оно состоит просто в том, что уравнения, выражающие единицы одной системы через единицы другой, должны иметь решение. Это условие равносильно тому, что преобразованные уравнения после логарифмирования имеют решение; говоря иначе, это условие состоит в том, что система линейных уравнений имеет решение, т. е. что детерминант коэффициентов этих линейных уравнений не равен нулю. Так как коэффициенты наших линейных уравнений (после логарифмирования) являются показателями в первоначальных формулах размерностей, то наше условие равносильно следующему: *детерминант показателей формул размерностей основных величин одной системы не должен равняться нулю в другой системе.*

Поэтому, желая выполнить преобразование, мы должны сначала убедиться, возможно ли оно вообще, для чего нужно составить детерминант показателей. Если последний равен нулю, то преобразование невозможно. Это значит, что одна из новых единиц, на которых мы хотим построить новую систему измерений, не является независимой от остальных. Если бы, например, в нашей задаче мы взяли вместо «5 эрг» в качестве третьей единицы новой системы «5 дин», мы бы нашли, что детерминант равен нулю, и преобразование стало бы невозможным. Это ясно и из других соображений: лошадиная сила есть работа в единицу времени и имеет размерность произведения силы на скорость, поэтому предлагаемая третья единица, имеющая размерность силы, может быть получена делением первой на вторую единицу, и, следовательно, зависит от них.

Второе замечание состоит в том, что новая система единиц должна содержать такое же число основных единиц, как и первая система. Если это не так, то, за исключением отдельных случаев, мы будем иметь большее или меньшее число уравнений, чем требуется для выражения новых единиц через прежние. В первом случае решение неопределенно, во втором решения вовсе нет.

Глава 4
П-теорема

Во второй главе мы видели, что формулы размерности всех величин, с которыми приходится иметь дело, могут быть представлены как произведения основных единиц в некоторых степенях. Перейдем теперь к рассмотрению выводов, которые можно сделать на основании этого относительно формы соотношений между различными измеримыми величинами явлений природы.

Во второй главе мы видели также, что эти функциональные соотношения могут, по крайней мере в некоторых случаях, помимо измеримых величин, содержать также так называемые размерные постоянные. Мы встретились с двумя такими постоянными — постоянной тяготения и скоростью света в пустом пространстве — и приписали им также размерность. Очень существенно отметить, что формулы размерности этих постоянных были того же типа, как и у измеряемых величин, т. е. они имели вид произведений основных величин в некоторых степенях. Это не случайность, но является правилом для любых размерных постоянных, с которыми приходится иметь дело. Доказательство этого мы дадим позднее, получив несколько более отчетливое представление о природе размерных постоянных. Точно так же позднее мы разберем и кажущееся исключение, так называемую логарифмическую постоянную. Однако уже теперь можно заметить, что один класс размерных постоянных должен быть несомненно указанной формы. Мы знаем, что эмпирическое уравнение, экспериментально проверенное измерениями в определенной системе единиц, может быть распространено на единицы любого размера, если к каждой измеренной величине ввести множитель — размерную постоянную с размерностью, обратной размерности измеренной величины. Поскольку формула размерности каждой измеренной величины есть произведение первичных величин в степенях, постольку их обратные величины должны обладать таким же свойством, т. е. теорема доказана для данного специального класса размерных постоянных. Мы предположим, пока без доказательства, что это положение верно в отношении всех размерных постоянных.

Пусть имеется функциональное соотношение между некоторыми измеренными количествами и размерными постоянными. Предполагаем, что формулы размерности всех этих величин, включая и размерные постоянные, известны. *Предположим далее, что соотношение имеет такой вид, который формально остается неизменным при любом изменении размеров первичных единиц.* Уравнение такой формы будем называть «*полным*»[1]. Мы видели, что вовсе нет необходимости, чтобы уравнение правильно и адекватно выражающее физические факты, было полным, хотя обратное положение делается почти всегда и часто считается основанием для проверки принципа однородности «физических» уравнений. Хотя адекватное уравнение не обязательно должно быть полным, однако, как мы видели, каждое адекватное уравнение может быть очень просто сделано полным. Таким образом, предположение о полноте не является для нас существенным ограничением, хотя оно и вызывает необходимость более тщательного исследования вопроса о размерных постоянных.

Предпосылка о полноте уравнения абсолютно необходима для задач нашей книги, анализ размерностей применим только к уравнениям такого типа. Следует заметить, что изменения первичной единицы в полном уравнении несколько ограничены. Можно изменять только размер первичных единиц, но не их характер. Так, например, полное уравнение, справедливое при любых изменениях размера первичных единиц массы, длины и времени, перестает быть верным и теряет смысл для другой системы единиц, в которой первичными являются масса, сила, длина и время.

Сделав эти оговорки, предположим, что мы имеем некоторое полное уравнение с определенным числом измеримых величин и размерных постоянных, справедливое для данной системы первичных единиц. Имея дело только с формулами размерности величин, входящих в уравнение, мы можем не различать измеримых величин от размерных постоянных. Обозначим переменные буквами α, β, γ, … и предположим наличие функционального соотношения:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0.$$

[1] Примечания см. в конце главы.

Смысл этого выражения состоит в том, что при подстановке чисел, являющихся мерой величин α, β, …, функциональное соотношение удовлетворяется. Мы применяем символ α как для обозначения самой величины, так и для ее численной меры, как об этом говорилось выше. Полнота уравнения значит, что функциональное уравнение остается справедливым при подстановке в него чисел, измеряющих α, β, γ, … в системе единиц, как угодно отличающихся по размеру от единиц основной системы. Мы уже применяли метод, основанный на формулах размерности, для определения изменения той или иной величины при переходе к другим первичным единицам. Этот вопрос разбирался во второй главе.

Назовем основные единицы m_1, m_2, m_3, … и обозначим размерности α через α_1, α_2, α_3, …, размерности β через β_1, β_2, β_3, … (относительно величин m_1, m_2, m_3, …).

Увеличим размер основных единиц m_1, m_2, m_3, … в x_1, x_2, x_3 и т. д. раз. Тогда численные значения α, β, … в новых единицах, которые мы обозначим через α', β', … будут, как доказано в третьей главе:

$$\begin{cases} \alpha' = (x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots)\, \alpha, \\ \beta' = (x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots)\, \beta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Уравнение $\varphi(\alpha, \beta, \ldots) = 0$ является полным, оно должно выполняться поэтому и при подстановке α', β', … на место α, β, …, т. е.

$$\varphi(\alpha', \beta', \ldots) = 0 \tag{A}$$

или

$$\varphi(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots \alpha,\, x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \ldots \beta,\, \ldots) = 0.$$

Это уравнение должно быть справедливым для всех значений x_1, x_2, … Возьмем частную производную относительно x_1, положив после дифференцирования все x равными 1. Мы получим следующее уравнение:

$$\alpha_1 \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \beta_1 \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \ldots = 0. \tag{B}$$

Введем новые независимые переменные:

$$\alpha'' = \alpha^{1/\alpha_1}, \quad \beta'' = \beta^{1/\beta_1}, \quad \ldots$$

Значение этой подстановки состоит, очевидно, в том, что величины α'', β'', ... зависят только от первых степеней исходных первичных величин. Если какие-нибудь из величин α_1, β_1, ... равны нулю, то соответствующие члены (B) выпадают и нет надобности в переходе к α'', β'', ...

При этой замене переменных уравнение (B) принимает вид:

$$\alpha''\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha''}+\beta''\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha''}+\ldots=0. \tag{C}$$

Назовем через ξ'' последнюю из n переменных α'', β'', ... и введем $(n-1)$ новых переменных z_1, z_2, ... , z_{n-1}, являющихся отношениями α'', β'', ... к ξ''.

Иначе говоря:

$$\alpha''=z_1\xi'', \quad \beta''=z_2\xi'', \quad \ldots, \quad \xi''=\xi''.$$

Подстановка в функциональное соотношение дает:

$$\varphi(\alpha'', \beta'', \ldots, \xi'')\equiv\varphi(z_1\xi'', z_2\xi'', \ldots, \xi'').$$

Теперь можно показать, что функция с правой стороны равенства не зависит от ξ''. Это следует из того, что производная относительно ξ'' равна нулю.

Действительно,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi''}=z_1\varphi_1'+z_2\varphi_2'+\cdots+z_{n-1}\varphi_{n-1}'+\varphi_n'=\frac{\alpha''\varphi_1'+\beta''\varphi_2'+\ldots+\xi''\varphi_n'}{\xi''}.$$

Последнее выражение равно нулю, так как числитель является просто левой частью уравнения (C) в другой форме.

Поэтому функция $\varphi(z_1\xi'', z_2\xi'', \ldots)$ действительно зависит только от $(n-1)$ z-тов, и мы можем написать:

$$\varphi(\alpha'', \beta'', \ldots, \xi'')=\varphi(z_1\xi'', z_2\xi'', \ldots, \xi'')=\psi(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}),$$

где ψ есть функция только $(n-1)$ аргументов, в то время как φ зависит от n аргументов. Более того, так как все величины α'', ... , ξ'' по определению зависят только от первой степени — первой первичной величины, то все отношения z_1, z_2, ... не имеют размерности относительно первичной величины.

Рассуждение можно теперь повторять сначала, если положить:

$$\psi(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) = 0,$$

что следует из (A), поскольку доказано, что ψ тождественно φ.

Но уравнение $\psi = 0$ есть уравнение того же типа, как (A) с тем отличием, что один аргумент исчез из функции и одна первичная величина из аргументов. Повторение прежнего приема с дифференцированием ψ относительно x_2 исключает вторую первичную величину из аргументов и снижает число аргументов еще на одно. Процесс, очевидно, может повторяться до полного исключения первичных величин. Каждое исключение первичной величины сопровождается уменьшением числа аргументов на одно, и таким образом окончательная функция становится функцией $(n - m)$ аргументов.

Рассмотрение характера подстановок, применяемых при осуществлении редукции обнаруживает характер аргументов окончательной функции. Мы имели дело с двумя типами замены переменных, с возведением в степень или с составлением отношения. Ясно, что комбинация таких подстановок может дать только произведения первоначальных переменных в некоторых степенях.

Отсюда мы получаем окончательный результат.

Если уравнение $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0$ есть полное уравнение, то решение имеет вид:

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \ldots) = 0,$$

где П являются независимыми произведениями аргументов α, β, $\gamma, \ldots$, которые не имеют размерности относительно основных единиц.

Результат, формулированный таким образом, известен под названием П-теоремы и в явной форме был высказан, по-видимому, впервые Бэкингэмом (4), эквивалентный результат применялся Джинсом (3), однако без отчетливой формулировки.

Последнее уравнение может быть разрешено относительно любого из произведений, и новая форма прежнего результата будет:

$$\alpha^{-1} = \beta^{x_1}\gamma^{x_2}\ldots\Phi(\Pi_2, \Pi_3, \ldots),$$

где x таковы, что $\alpha\beta^{-x_1}\gamma^{-x_2}\ldots$ не имеет размерности.

В этой форме результат есть математическое выражение принципа размерной однородности. Произвольная функция в правой части есть функция аргументов с нулевой размерностью, и, таким образом, каждый член результирующей функции должен сам по себе не иметь размерности. Каждый член этой функции должен быть умножен на член той же размерности, каковую имеет левая сторона уравнения, с тем, чтобы каждый член правой части имел такую же размерность, как и левая часть. Члены могут быть перегруппированы любым способом, но при какой угодно перегруппировке размерность всех членов будет та же самая. Это положение известно под названием принципа размерной однородности.

Часто делаются попытки дать непосредственное доказательство принципа размерной однородности с точки зрения на формулу размерности как на выражение «физической сущности» некоторой величины. Так говорят, например, что уравнение, являющееся адекватным выражением физических фактов, должно быть верным при любом изменении размеров основных единиц, ибо физическое соотношение не может зависеть от произвольного выбора единиц. Если же уравнение верно при любом выборе единиц, то размерность всех членов должна быть одной и той же, иначе мы приравнивали бы друг другу величины различного физического характера. Например, согласно этому взгляду мы не можем иметь с одной стороны уравнения величину с размерностью длины и величину с размерностью площади на другой стороне уравнения, ибо равенство площади длине является абсурдом. Шаткость этой точки зрения будет ясной, если вспомнить, что уравнение может быть только уравнением между числами, являющимися мерой некоторых физических величин.

Особо важно отметить, что вышеприведенные рассуждения подлежали крайне существенному, не высказанному явно ограничению.

Полагая $\varphi(\alpha, \beta, \dots) = 0$, мы неявно предполагали, что это единственное соотношение между $\alpha, \beta, \dots$ и что поэтому частные производные могут быть найдены обычным образом. Если $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ связаны и иными уравнениями помимо $\varphi(\alpha, \beta, \dots) = 0$, то наши рассуждения перестают быть справедливыми и результаты не верны. В общем случае неважно, что полное уравнение, т. е уравнение, остающееся справедливым при изменении размера первичных единиц, размерно однородно. Такое уравнение необходимо размерно однородно только в том случае, если нет других численных связей между переменными, кроме самого уравнения.

Рассмотрим в виде примера падение тела. Пусть v — его скорость, s — путь, пройденный падающим телом, t — время падения, g — ускорение силы тяжести. Эти величины связаны между собой и существует не только одно уравнение связи, так как v и s определены, если даны t и g. Соотношения, связывающие эти величины, суть:

$$v = gt; \quad s = \frac{gt^2}{2}.$$

На основании вышесказанного, мы можем ожидать, что полное уравнение, связывающее v, s, g и t, не окажется размерно однородным. Результат получается сразу, именно:

$$v + s = gt + \frac{gt^2}{2}.$$

Это, очевидно, полное уравнение, потому что оно верно и останется верным при любом изменении размера основных единиц длины и времени. На основании этих элементов можно построить уравнение значительно более необычное и очень сложное, например:

$$v\left[\sin\frac{s+gt}{v}\right]^{\operatorname{sh}(s-gt^2/2)} = gt\operatorname{ch}(v-gt).$$

Это — снова полное уравнение, оно не является размерно однородным и нарушает наше предвзятое мнение о возможных трансцендентных функциях.

Возможность уравнений такого рода сама по себе опровергает интуитивный метод доказательства принципа размерной однородности.

Уравнение $v + s = gt + \dfrac{gt^2}{2}$ напоминает один из приемов, применяемых в векторном анализе, в котором три скалярных уравнения могут быть заменены одним векторным. Разумеется, можно складывать вместе любое число полных уравнений, получая правильный результат. Если размерности первоначальных уравнений все различны, то получаемое сложное уравнение (полное, но размерно неоднородное) может быть разложено подобно векторному уравнению на некоторое число более простых уравнений, если выбирать части с равными размерностями. Я не знаю, впрочем, может ли такой метод сведения результатов в общую компактную форму принести какие-либо практические преимущества.

Вернемся теперь к первой форме нашего результата:

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \ldots) = 0.$$

Рассмотрим произведения Π и их структуру из переменных. Напишем типичное Π в форме.

$$\alpha^a \beta^b \gamma^c \ldots$$

a, b, c, $\ldots$ должны быть выбраны так, чтобы это выражение не имело размерности. Подстановка размерных символов α, β, $\ldots$ дает столько же уравнений между a, b, c, $\ldots$, сколько имеется видов основных единиц.

Эти уравнения таковы:

$$\begin{cases} \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c + \ldots = 0, \\ \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad \alpha_m a + \beta_m b + \ldots = 0. \end{cases}$$

Имеется m уравнений, каждое с n членами. Теорию решения такой системы уравнений можно найти в курсах алгебры.

Вообще говоря, $n > m$. При этом условии в общем случае будет $(n - m)$ независимых решений, т. е. будет $(n - m)$ независимых произведений без размерности, и произвольная функция F будет функцией $(n - m)$ переменных.

В некоторых специальных случаях это заключение должно быть видоизменено. Если, например, $n = m$, то решения, вообще говоря, не будет; оно имеется, однако, в том случае, когда детерминант показателей

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \ldots \\ \alpha_2 & \beta_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_m & \beta_m & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

Далее, может быть более чем $(n - m)$ независимых решений. Это произойдет в том случае, когда *все* m-рядные детерминанты показателей равны нулю. Разумеется, это редкий случай, но мы встретимся с одним таким примером.

В общем случае, когда имеется $(n - m)$ независимых решений, вообще говоря, возможно выбрать $(n - m)$ из величин a, b, c, $\ldots$ подходящим образом, приписать им $(n - m)$ независимых значений и разрешить относительно остающихся величин. Таким образом получается $(n - m)$ значений, определяющих $(n - m)$ произведений, не имеющих размерности. Иногда это не возможно, и система величин a, b, c, $\ldots$, которой можно приписать произвольные значения, не может быть выбрана вполне свободно. Это имеет место в том случае, когда некоторые детерминанты из ряда показателей равны нулю. Мы не будем развивать здесь общей теории, так как исключения позаботятся сами о себе, как это всегда бывает при решении конкретных задач.

Заметим, что П-теорема не содержит ничего существенно нового, она не дает нам новых способов анализа задач, способов, отличных от тех, которыми мы уже пользовались во введении.

Преимущества теоремы — в ее удобстве, она представляет результат в такой форме, в которой им можно пользоваться с меньшим умственным напряжением и в весьма гибкой форме. При помощи этой теоремы результаты анализа размерностей могут быть представлены в разнообразных формах, зависящих от переменных, которые нас наиболее интересуют. Все это составляет важное преимущество.

Результат этого анализа размерностей не ставит каких-либо ограничений в отношении формы функций, выражающих результаты опытов, ограничивается только форма аргументов. Как бы ни сложна была функция, если она только удовлетворяет основным требованиям развитой выше теории, то всегда возможно перегруппировать члены таким образом, чтобы функция зависела только от аргументов, не имеющих размерности. Пользуясь теоремой, мы обычно заинтересованы в том, чтобы выразить одну из величин в функции остальных. Это достигается решением функции для частного произведения без размерности, в котором содержится интересующая нас переменная. Затем это произведение без размерности умножается (так же, как и другая сторона уравнения) на обратную величину тех переменных, которые соединены в произведении без размерности. В результате на одной стороне уравнения остается единственная переменная, в то время как на другой располагаются произведения остальных переменных в некоторых степенях, умноженные на произвольную функцию других произведений без размерности. Эта произвольная функция может быть сколь угодно трансцендентна; она ничем не ограничена, только ее аргументы не должны обладать размерностью. Это согласуется с нашими привычными сведениями относительно возможных функциональных соотношений. Мы привыкли к тому, что всякий аргумент под знаком трансцендентной функции не должен иметь размерности. Обычно говорят, что бессмысленно брать, например, гиперболический синус от времени, возможен только гиперболический синус от числа [5]. Замечание о том, что обычно аргумент гиперболического синуса в нашем анализе не имеет размерности, верно, однако приведенное только что объяснение этого — неправильно. Нет основания, по которому мы не могли бы составить sh от числа, измеряющего некоторый промежуток времени в часах, или от числа яблок, помещающихся в мерке. Обе операции вполне мыслимы, однако ограничения, налагаемые П-теоремой, таковы, что мы очень редко встречаемся с sh от величины, имеющей размерность. Если бы мы натолкнулись все же на такой случай, то перегруппировкой членов, как уже объяснено, можно освободиться от трансцендентной функции с размерным аргументом, слив две или большее число таких функций в sh единственного аргумента, не имеющего размерности. Так, например, нет никаких препятствий к написанию уравнения падающего тела в такой форме:

$$\operatorname{sh} v = \operatorname{sh} gt,$$

но этого никто не станет делать, потому что такая форма много сложнее обычной.

Это уравнение можно написать и в таком виде:

$$\operatorname{sh} v \operatorname{ch} gt - \operatorname{ch} v \operatorname{sh} gt = 0.$$

В этом случае перегруппировка, требуемая для освобождения от трансцендентной функции размерного аргумента, уже не столь ясна, особенно если бы тригонометрическая форма стала привычной. Однако и эта форма вполне пригодна для численных расчетов в том смысле, что она всегда будет давать верный результат и останется справедливой при изменении размера основных единиц.

Еще один вывод в отношении показателей в связи с этими замечаниями о трансцендентных функциях. Ясно, что в общем случае не может быть показателя, имеющего размерность. Если таковой присутствует, его возможно комбинировать с другими так, что размерность исчезнет. Но не существует никакого ограничения в отношении числовых значений показателей, они могут быть целыми, дробными или иррациональными. Часто думают, что формула размерности некоторой величины не может содержать основных единиц в дробных степенях (6). Это заключение связано с общей точкой зрения на формулы размерностей как на выражение операций с конкретными физическими предметами: при таком взгляде на дело трудно приписать, например, какой-либо смысл времени в степени двух третей. Мне кажется, однако, одинаково трудным найти физический смысл для времени в степени минус два, между тем возможность таких степеней допускается всеми.

П-теорема в изложенной форме содержит все элементы, необходимые для наших целей. Однако в применениях имеется большой простор для выбора аргументов функции, что явствует из возможности различными способами выбрать независимые решения системы алгебраических уравнений. Избранный путь определяет форму произведений, не имеющих размерности, и наилучшая форма для этого находится в зависимости от характера проблемы. В главе шестой мы рассмотрим несколько конкретных примеров, которые покажут, каким образом нужно выбирать произведения в специальных случаях.

Литература

[1] E. Buckingham. Phys. Rev. **4**, 345, 1914.

[2] Routh. Dynamics.

[3] J. H. Jeans. Proc. Roy. Soc. **76**, 545, 1905.

[4] E. Buckingham, см. (1), также Journ. Wash. Acad. **4**, 347, 1914.

[5] E. Buckingham, см. (1), стр. 346: «Такие выражения, как $\lg Q$ или $\sin Q$ не встречаются в физических уравнениях, ибо никакой чисто арифметический оператор, за исключением простого числового множителя, не может быть применен к величине, которая сама не является числом без размерности. Мы не можем приписать никакого определенного смысла результату такой операции».

В связи с этим см. также стр. 266 книги Томпсона.

[6] S. P. Thompson. Элементарные уроки по электричеству и магнетизму, стр. 352.

«Также кажется абсурдным, что размерность единицы электричества должна иметь дробные показатели, ибо такие величины, как $\mathrm{M}^{1/2}$ или $\mathrm{L}^{1/2}$ не имеют смысла».

W. W i l l a m s. Phil. Mag. **34**, 23, 1892: «Поскольку L, M и T являются основными единицами, мы не можем ожидать дробных степеней... Теперь все динамические концепции строятся в конечном счете на основе этих трех понятий: массы, длины и времени, а поскольку процесс является синтетическим, строящим сложное из простого, все происходит в соответствии с принципами алгебры посредством целых степеней L, M и T... Разумеется, если масса, длина и время — предельные физические концепции, мы не можем истолковать дробные степени L, M и T, потому что мы не в состоянии свести эти понятия к чему-либо более простому.

Оставаясь на почве любой физической теории, мы не можем интерпретировать формулы, содержащие дробные показатели основных единиц».

Глава 5
Размерные постоянные и число основных единиц

Существенный результат П-теоремы состоит в ограничении, налагаемом ею на число аргументов произвольной функции. Чем меньше аргументов, тем более ограничена функция, тем более исчерпывающий ответ мы получаем. Если в задаче четыре переменных и три основных единицы, то наш анализ показывает, что имеется единственное произведение без размерности, которое можно определить, и что некоторая функция этого произведения равна нулю. Это эквивалентно утверждению, что в данном частном случае само произведение является некоторой постоянной, и мы имеем полные сведения о характере решения за исключением численной величины постоянной. Такое решение мы имели в первой главе при рассмотрении задачи о маятнике. Без применения анализа размерностей всякое непротиворечивое соотношение между четырьмя аргументами могло казаться возможным, и мы не могли бы догадаться об истинном решении. Если число переменных на два больше, чем число основных, то будет два произведения без размерности, решением будет произвольная функция двух этих произведений, равная нулю. Эта функция может быть разрешена для одного из произведений в функции другого. С таким случаем мы встречались в задаче о теплопроводности. Разумеется, существенно знать, что решение имеет именно такую форму. Не применяя анализа размерностей, мы могли бы только утверждать, что существует некоторая функция пяти переменных, равная нулю.

Очевидно, в наших интересах, чтобы число аргументов, связанных функциональным соотношением, было минимальным. Переменные, входящие в уравнения, к которым применялся наш анализ, и являются всеми переменными, которые могут изменяться численно по условиям задачи. *Эти переменные могут быть разделены на две группы.* Первая группа — *физические переменные*, являющиеся мерой некоторых физических величин и могущие изменяться по величине во всей области, к которой применимы наши результаты. Числа, измеряющие эти физические величины, могут меняться при изменении размера основных единиц.

Ко второй группе относятся другие аргументы, имеющие характер *коэффициентов в уравнении*, они не изменяют числовой величины, если меняется только физическая система, но приобретают иное значение при перемене размера основных измеряющих единиц. Мы назвали их размерными постоянными. В реальных случаях мы интересуемся только физической задачей и стремимся найти связь между физическими переменными величинами. Размерные постоянные должны рассматриваться только как неизбежное зло, терпимое постольку, поскольку они способствуют получить нужные сведения о физических переменных.

Итак, мы видим, что П-теорема применяется к агрегату физических переменных и размерных постоянных, причем нас интересуют прежде всего только физические переменные. Если число размерных постоянных столь велико, что число аргументов произвольной функции, допустимое П-теоремой, равно или больше числа одних физических переменных, то применение П-теоремы ничего не дает.

Мы уже видели, что в наихудшем возможном случае число размерных постоянных не может превышать числа физических переменных, ибо любое эмпирическое уравнение может быть сделано полным введением по одной размерной постоянной на каждую физическую переменную. Далее почти всегда число физических переменных равно или больше, чем число первичных единиц. Поэтому, если число размерных постоянных равно или больше числа физических переменных, то число произведений без размерности больше или равно числу физических переменных. В общем случае П-теорема не дает, следовательно, новых сведений. Поэтому крайне важно свести до минимума число размерных постоянных в уравнении.

Когда же следует ожидать размерных постоянных и каким образом в конкретной задаче узнать, что они собою представляют и каковы их формулы размерности? Ответ тесно связан с выбором таблицы физических величин, между которыми мы ищем связи. Мы уже видели, что недостаточно спросить: «Зависит ли результат от той или другой физической величины». Мы видели, например, в одной задаче, что хотя результат несомненно зависит от действия атомных сил, однако мы обошлись без включения их в наш анализ, и они не вошли в функциональную зависимость.

Ответ на вопрос о том, какие переменные следует включать, требует большой физической опытности. Если мы хотим разобрать некоторую проблему методами механики, мы должны иметь достаточную уверенность, что задача действительно механическая и не содержит элементов, по существу не разрешимых при помощи обычных уравнений механики. Мы должны понять, какие стороны явления могут быть оставлены без внимания, а какие, наоборот, существенны для данного вопроса. Никто, конечно, не скажет, что в механической задаче атомные силы не имеют значения, но опыт показывает, что эти силы слагаются в некоторые комплексы, достаточно характеризуемые анализом, не опускающимся до рассмотрения деталей. Результаты такого анализа, пренебрегающего многими даже существенными сторонами положения, имеют силу при некоторых условиях, не слишком стеснительных. Опытность, проявляемая в суждениях такого рода, простирается столь далеко, что мы почти инстинктивно знаем, доступна ли данная задача механической трактовке, или нет. Если задача поддается механическому решению, мы знаем уже по самому определению смысла механической системы, какого рода уравнения соответствуют движению составных частей системы и какова форма этих уравнений.

Точно также по инстинкту мы угадываем, является ли система термодинамической, электрической или химической, и в каждом случае, зная смысл утверждения о той или иной природе явления, мы предусматриваем законы, управляющие изменениями системы, и элементы, которые нужно принять во внимание при формулировке соотношения. Потребовалось огромное накопление опыта нескольких поколений, прежде чем стало возможным сказать, что данная конкретная группа явлений есть механическая, электрическая или даже вообще физическая.

Я полагаю, что в сущности те же сведения, которые требуются для решения вопроса о механической и электрической природе системы, нужны и для анализа размерностей. Эти сведения подсказывают нам прежде всего, какие физические величины должны быть включены в таблицу, и затем позволяют определить, какие размерные постоянные требуются в данной задаче.

Забудем на минуту все, что мы знаем об анализе размерностей и представим себе, что мы подходим к новой проблеме. Прежде всего, на основе накопленного веками опыта мы решаем, какова природа проблемы. Предположим, что мы решили, что перед нами механическая задача. Мы знаем, более того, что движение системы управляется законами механики, и нам известны сами законы. Мы выписываем определенные уравнения движения системы. Мы заботимся о включении всех уравнений движения, так что система уравнений, при помощи которой устанавливается связь между частями системы, имеет единственное решение. Мы убеждены, на основании нашего прежнего опыта, что в существенном нами представлены все элементы задачи, что наши уравнения соответствуют действительности по крайней мере в отношении некоторых сторон явления и что решение уравнений правильно опишет свойства разобранной нами системы. Предположим, что мы не ошиблись, факт выполнения наших предсказаний значит только то, что мы овладели некоторой группой явлений природы.

Проницательный наблюдатель (таким исторически впервые оказался Фурье (1)) замечает, что уравнение, посредством которого анализируется связь между частями системы, выражается в общей форме, остающейся справедливой при изменении размера основных единиц. Например, уравнение, утверждающее, что сила, действующая на ту или иную часть нашей механической системы, равна массе, умноженной на ускорение, справедливо для любых основных единиц, потому что в каждой системе единиц, применяемой для механических целей, единица силы определяется именно так, что выполняется указанная связь силы, массы и ускорения. Любое из основных уравнений движения является в том же смысле полным. Окончательное решение получается из уравнений движения чисто математически, без какого-либо отношения к размеру основных единиц. Отсюда следует вообще, что окончательный результат тоже будет полным, т. е. уравнение, выражающее окончательный результат есть полное уравнение.

Таким образом, анализ размерностей может применяться к результатам, получаемым при решении уравнений движения. (Мы говорим об уравнениях движения в общем смысле, применяя их к термодинамическим, электрическим, так и механическим системам). Аргументами функции, которую мы окончательно получаем, решая уравнения движения, могут быть, очевидно, величины, положенные в основу первоначальных уравнений движения, ибо математические операции сами по себе не могут ввести новых аргументов.

В частности размерные постоянные окончательного результата должны быть теми же и только теми же, которые фигурировали

в уравнениях движения. В этом вся сущность вопроса о размерных постоянных.

В отношении формул размерности размерных постоянных мы можем только опираться на опыт, показывающий, что все такие постоянные имеют форму произведений основных величин в некоторых степенях. Небольшое размышление показывает, однако, что любой закон природы может быть выражен в форме, в которой формулы размерности постоянных будут относиться именно к этому типу. Для этого нужно воспользоваться уже известным нам приемом, вводя размерные постоянные в качестве множителей при измеряемых величинах таким образом, чтобы достигнуть полноты уравнения. Поэтому мы принимаем в дальнейшем, что уравнения движения (выражающие законы природы, управляющие явлениями) уже приведены к такой форме, что размерные постоянные относятся к указанному типу. Легко видеть, что это не вносит никаких реальных ограничений.

Отсюда ясно, что *анализ размерностей по своему существу есть анализ анализа.* Мы должны достаточно понимать ситуацию, чтобы судить об общем характере проблемы и об элементах, которые должны быть введены при составлении уравнений, определяющих движение (в общем смысле) системы. Зная характер элементов, можно получить некоторые сведения о необходимых свойствах соотношений, которые могут быть выведены путем математических манипуляций с элементами.

Мы можем доверять результатам, поскольку достоверны наши сведения о законах природы, с которыми приходится иметь дело в задаче, но результаты не могут содержать чего-либо, не имеющегося в уравнениях движения, и ни чем не отличаются от прочих наших знаний. Эти результаты приближенны настолько же, насколько приближенны законы движения. Такое ограничение определяется самой сущностью наших знаний.

Применяя анализ размерностей, нельзя задаваться вопросом: «От каких величин зависит результат», ибо этот вопрос никуда не приведет и непозволителен. Вместо этого надо представить себе, что мы действительно составляем уравнения движения по крайней мере до такой стадии, что в состоянии перечислить входящие элементы. Нет надобности фактически составлять уравнения и тем более их разрешать. Анализ размерностей дает тогда определенные сведения о необходимом характере результата.

В этом несомненное преимущество метода, ибо его результаты применимы к таким сложным системам, для которых мы не в состоянии написать уравнения движения со всеми деталями.

Необходимо особенно подчеркнуть, что *результаты анализа размерностей не могут быть применены к системам, основные законы которых до сих пор не выражены в форме, независимой от размера основных единиц.* Например, анализ размерностей несомненно оказался бы неприменимым к большинству результатов биологических измерений, хотя эти результаты могут обладать полной физической значимостью, как описание явлений. Нам кажется, что в настоящее время биологические явления могут быть описаны полными уравнениями только с помощью стольких же размерных постоянных, сколько имеется физических переменных. Мы видели, однако, что в этом случае анализ размерностей не дает никаких новых сведений. Овладение группой явлений природы и формулировкой их в виде законов до известной степени равносильно открытию ограниченной группы размерных постоянных, пригодных для координации всех явлений.

Применим этот взгляд на природу размерных постоянных к уже затронутой задаче об электромагнитной массе сферически распределенного электрического заряда. Это, разумеется, — электродинамическая задача, которую надо решать, пользуясь уравнениями поля. Уравнения поля содержат некоторые математические операторы, применяемые к определенным сочетаниям электрической и магнитной силы и к скорости света. В нашей частной задаче мы хотим решить уравнения в такой форме, чтобы определить электромагнитную массу. Это — объемный интеграл от некоторой постоянной, умноженной на плотность энергии, причем последняя определяется распределением сил, обусловливаемых распределением заряда. Если имеется соотношение, подозреваемой нами формы, то силы должны исключиться в окончательном результате. Нет, однако, оснований думать, что характеристическая постоянная c уравнений также элиминируется. Мы должны, следовательно, искать связи между общим зарядом, массой, радиусом и константой уравнения поля, т. е. скоростью света. Такое соотношение нами уже найдено и сверено с результатами детального решения уравнений поля, примененных к данной проблеме.

Мы видели, что размерные постоянные входят в окончательный результат постольку, поскольку они имеются в уравнениях движения. Но размерная постоянная в уравнении движения есть выражение универсальной физической связи, характерной для всех явлений, входящих в рассматриваемую группу. Можно двояко трактовать такие универсальные физические связи. Можно оставить размерную постоянную в уравнениях как явное выражение связи, подобно тому, как это делается в уравнениях электродинамики. С другой стороны, можно определить наши основные единицы, имея в виду эту связь; таким образом получится система единиц с исчезнувшей размерной постоянной, в которой, однако, число единиц, которые можно считать первичными, ограничено тем, что все единицы, относящиеся к системе, автоматически гарантируют экспериментальную связь друг с другом. Система единиц такого рода имеет ценность только при рассмотрении группы явлений, к которой данный закон применяется.

Так, например, на опыте мы находим, что масса, умноженная на ускорение, пропорциональна силе, действующей на нее. В этом экспериментальном утверждении не содержится ограничений в отношении единиц массы, длины, времени и силы. Фактор пропорциональности будет меняться по числовому значению при изменении размеров каждой из основных единиц. Вместо того, чтобы заниматься скучным делом непрерывного изменения фактора пропорциональности, можно произвольно потребовать, чтобы он равнялся единице во всех системах, которые мы будем рассматривать; этого результата можно достигнуть, определив единицу силы в нашей новой системе так, что бы сила, действующая на тело, равнялась массе, умноженной на ускорение. Таким образом мы получим систему единиц, приспособленную к операциям со всеми физическими системами, в которых законы движения содержат утверждение о физической связи между силой, массой и ускорением. Но если бы физическая система была таковой, что указанное соотношение не входило в движение системы, мы бы бесполезно ограничили себя, применяя механическую систему единиц.

Эти соображения о возможных системах единиц отвечают на ранее поставленный вопрос в связи с четвертой задачей введения о числе единиц, которые нужно выбрать в качестве первичных. Ответ целиком зависит от характера задачи и определяется физическими связями, необходимыми для полного выражения частей. Например, в любой обычной задаче динамики связь между силой, массой и ускорением существенно входит в уравнения движения. Эта связь может быть внесена в уравнения либо применением четырех первичных единиц силы, массы, длины и времени с соответствующей размерной постоянной пропорциональности, либо на основе привычных механических единиц массы, длины и времени, в которых сила определена так, что экспериментальное соотношение всегда выполняется, и размерная постоянная исчезает. В обоих случаях результаты анализа размерности одни и те же, ибо разница между числом первичных единиц и числом переменных, определяющая число аргументов неизвестной функции, та же самая в обоих случаях. Когда число единиц увеличивается на одну включением силы, то число переменных также возрастает на одно, включая размерную постоянную, разница при этом остается постоянной. Если бы, однако, проблема была такой, что экспериментальная связь силы, массы и ускорения не входила в уравнения движения системы, то обычные механические единицы были бы неподходящими, ибо с ними мы получили бы меньше сведений. В этом случае можно пользоваться четырьмя первичными единицами, не вводя соответствующей размерной постоянной в таблицу переменных, так что разница между числом переменных и единиц станет меньше на единицу, и число аргументов функции станет меньше, что желательно. Мы встретимся дальше с примером, иллюстрирующим это.

Литература

[1] Fourier. Theorie de Chaleur, 160.

По общему вопросу о рациональном числе основных единиц можно указать заметки.

[2] E. Buckingham. Nature. **96**, 208 и 396, 1915.

Глава 6

Примеры анализа размерностей

Повторим прежде всего результаты предшествующей главы. Приступая к анализу размерностей, мы должны представить себе, что перед нами задача обычного анализа, которую надо выполнить по крайней мере до стадии суждения о природе проблемы и до выяснения всех физических переменных, которые должны войти в уравнения движения (в общем смысле) и также всех размерных коэффициентов, требуемых для написания уравнений движения. Затем нужно выписать размерности всех переменных относительно основных единиц. Эти единицы для каждой конкретной проблемы должны выбираться так, чтобы число их было возможно большим при условии отсутствия компенсирующих размерных постоянных в уравнениях движения. Далее, в соответствии с П-теоремой должны быть образованы произведения переменных, не имеющие размерности. Эти произведения следует выбирать из большого возможного разнообразия таким способом, чтобы переменные, в которых мы заинтересованы особо, фигурировали вполне отчетливо. После формирования произведений П-теорема непосредственно приводит к функциональному соотношению.

В нижеследующих примерах мы особо остановимся на вопросах о подходящем числе основных единиц и наиболее удобном выборе произведений без размерности. Вопрос о размерных постоянных мы считаем выясненным.

В качестве первого примера возьмем первую задачу, разобранную Рэлеем в Nature (1). Рассмотрим волну, распространяющуюся по глубоководному резервуару под действием тяжести. Это, очевидно, гидродинамическая проблема, т. е. просто механическая в применении к жидкости. Здесь применимы, следовательно, уравнения механики. Если жидкость смещена из положения равновесия, она возвращается в него под действием тяжести. Таким образом, в задачу входят плотность жидкости и сила тяжести. Очевидно, эти же величины должны войти и в уравнения движения. Никакие другие свойства жидкости вроде сжимаемости не войдут, потому что из рассмотрения уравнений гидродинамики нам известно, что такие свойства не существенны для явлений этого масштаба. Физически, разумеется, сжимаемость должна до известной степени влиять на результат, так что наш вывод будет неточным, он будет приближенным в такой же степени, как и уравнения гидродинамики. В уравнения гидродинамики не входят размерные постоянные, если только применять обычные механические единицы, в которых масса, длина и время являются основными величинами; законы движения вошли в эту систему единиц через определение силы. Уравнения, конечно, суть уравнения между смещениями и другими элементами. Можно представить себе, что мы в состоянии исключить из уравнений различные смещения и в конце концов получить связь только скорости распространения, плотности и напряжения тяжести, подобно тому, как это было в задаче о маятнике.

Попробуем это сделать. Выпишем переменные и их формулы размерности, как это уже делалось во введении.

Таблица 6.

Название величины	*Символ*	*Формула размерности*
Скорость волны	v	LT^{-1}
Плотность жидкости	d	ML^{-3}
Ускорение силы тяжести	g	LT^{-2}

Применим теперь П-теорему. У нас три переменных и три основных единицы. Разница между этими числами равна нулю и, следовательно, согласно теореме, не может быть произведений без размерности. Это значит, что мы сделали какую-то ошибку, и соотношения не существует, если только здесь нет одного из тех исключительных случаев, в которых произведение может быть образовано из меньшего чем нормальное число множителей. Более внимательное рассмотрение показывает, однако, что это не исключение, а что действительно не существует произведения без размерности. Это показывает, что предполагаемая элиминация невозможна, и что в окончательный результат должны войти другие элементы или комбинация элементов. Несомненно, детальный анализ должен привести в итоге к полному описанию движения воды, на основании которого получится волновое движение и его скорость. Иначе говоря, помимо скорости в окончательный результат должно войти еще нечто, характеризующее данные волны. Скорость всех волн не обязательно должна быть той же самой, она может зависеть от длины волны. Физически, разумеется, мы это знали заранее и притворялись невеждами только для дидактических целей. Наши сведения по этому вопросу должны были заставить искать связи между скоростью и длиной волны. Введем поэтому в нашу таблицу величин длину волны λ, размерность которой L.

Теперь у нас четыре переменных. П-теорема указывает, что имеется одно произведение без размерности, которое должно равняться постоянной величине.

Доказательство П-теоремы показало также, что один из показателей в произведении без размерности может быть избран произвольно. Мы особенно заинтересованы в скорости v, потому выберем показателем для нее единицу и составим произведение без размерности в форме

$$vd^{-\alpha}g^{-\beta}\lambda^{-\gamma}.$$

Полагая все это равным постоянной величине и разрешая относительно v, получаем

$$v = \mathrm{const}\, d^{\alpha}g^{\beta}\lambda^{\gamma}.$$

Размерность множителей в правой стороне должна быть в итоге такой же, как у скорости, стоящей изолированно с левой стороны.

Подставим формулы размерностей переменных:

$$\mathrm{LT}^{-1} = (\mathrm{ML}^{-3})^{\alpha}(\mathrm{LT}^{-2})^{\beta}\mathrm{L}^{\gamma}.$$

Выпишем последовательно условия равенства показателей M, L и T с обеих сторон уравнения.

Это дает:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \quad (\text{условие для M}),\\ -3\alpha+\beta+\gamma &= 1 \quad (\text{условие для L}),\\ -2\beta &= -1 \ (\text{условие для T}), \end{aligned}$$

откуда

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2}.$$

Окончательно имеем:

$$v = \mathrm{const}\sqrt{\lambda g}.$$

Скорость гравитационной волны в глубоководном резервуаре (глубина не входит в конечный результат, потому что мы постулировали, что вода очень глубока) пропорциональна таким образом корню квадратному из длины волны и ускорения силы тяжести или пропорциональна скорости, приобретаемой телом, свободно падающим под действием тяжести на расстоянии, равном длине волны.

Заметим, что плотность жидкости исчезла в окончательном результате. Это можно было предвидеть: если плотность удваивается, то удваивается и сила тяжести, действующая на каждый элемент, поэтому ускорение, а следовательно, и все скорости остаются неизменными, так как удвоенная сила компенсируется удвоением массы каждого элемента.

Поскольку плотность не фигурирует в окончательном результате, мы имеем произведение без размерности, составленное только из v, λ, g. Это произведение без размерности трех переменных, выраженное через три основные величины. В общем случае это невозможно, для этого требуются специальные соотношения между формулами размерностей переменных.

Составив произведение с неизвестными показателями и написав затем алгебраические уравнения, которым должны удовлетворять показатели, мы можем сразу видеть, что условие существования произведения без размерности с числом множителей, равным числу основных единиц, состоит в том, что детерминант показателей в формулах размерностей множителей равен нулю. Ясно, что это не ограничивается случаем трех основных единиц, но применимо к любому их числу. Обратно, условие того, что тот или иной элемент входит множителем в произведение без размерности с числом других множителей, равным числу основных единиц, состоит в том, что детерминант показателей других множителей не должен равняться нулю; в противном случае остальные множители сами по себе составили бы произведение без размерности, в которое не входил бы интересующий нас множитель.

Этот пример — превосходная иллюстрация необходимости сочетания здоровой физической интуиции с чисто формальными манипуляциями. Пренебрегая глубиной, мы аргументировали тем, что при бесконечном возрастании глубины скорость стремится к предельному значению, не зависящему от глубины. Есть далее другой фактор, которым мы пренебрегли в нашем анализе, — это амплитуда h волны, которая, очевидно, аналогична амплитуде колебания в простой задаче о маятнике. Если бы мы включили ее в нашу первоначальную таблицу величин, было бы еще одно произведение без размерности, $\frac{\lambda}{h}$; если бы нам это со злостным намерением подсказали, мы получили бы результат:

$$v = f\left(\frac{\lambda}{h}\right)\sqrt{hg},$$

где f — произвольная функция.

Эта форма совершенно не противоречит первой, как можно видеть, положив

$$f\left(\frac{\lambda}{h}\right) = \mathrm{const}\sqrt{\frac{\lambda}{h}},$$

но, разумеется, она дает значительно менее сведений.

Рассмотрим теперь другую задачу. Имеется упругий маятник, осуществленный из невесомой пружины с упругой постоянной k и с подвешенным ящиком объема v, наполненным жидкостью с плотностью d. На массу жидкости в ящике действует тяжесть. Требуется найти выражение для периода колебаний. Как всегда, составляем таблицу величин и их размерностей.

Таблица 7.

Название величины	*Символ*	*Формула размерности*
Упругая постоянная (сила на единицу смещения)	k	MT^{-2}
Время колебания	t	T
Объем ящика	v	L^3
Плотность жидкости	d	ML^{-3}
Ускорение силы тяжести	g	LT^{-2}

Задача, очевидно, механическая, и мы имеем полное основание применять механическую систему единиц, причем размерных постоянных не будет. Переменные таблицы являются, таким образом, единственными, они совпадают с переменными, при помощи которых задача формулирована. Мы имеем пять величин при трех основных единицах. Поэтому должны существовать два произведения без размерности. Из предыдущей главы мы знаем, что для нахождения произведений без размерности мы должны решать систему алгебраических уравнений.

Некоторые из решений могут быть выбраны произвольно, остальные определяются через них. В данной задаче нас особо интересует t, и, положим, k. Выберем поэтому показатели для t и k в произведениях без размерности произвольно, как основу для расчета остальных. Алгебраическая теорема показала нам, что существуют две линейно независимые системы показателей, которые могут быть приписаны t и k, причем эти две системы могут быть выбраны бесконечным числом способов. Попробуем выбрать две простейших системы. Припишем показателю t значение 1 и показателю k значение 0 для одной системы, и обратно, т. е. для t нуль и для k единицу в другой системе. Разумеется, это очень простые пары, которые позволяют t и k фигурировать только в одном произведении без размерности. Таким образом, мы должны найти два произведения без размерности:

$$tv^{\alpha_1}d^{\beta_1}g^{\gamma_1}, \quad kv^{\alpha_2}d^{\beta_2}g^{\gamma_2}.$$

Мы имеем теперь две группы алгебраических уравнений для двух групп неизвестных показателей α_1, β_1, γ_1 и α_2, β_2, γ_2.

Эти уравнения таковы:

$$\begin{cases} 0\alpha_1 + \beta_1 + 0\gamma_1 + 0 = 0, \\ 3\alpha_1 - 3\beta_1 + \gamma_1 + 0 = 0, \\ 0\alpha_1 + 0\beta_1 - 2\gamma_1 + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0\alpha_2 + \beta_2 + 0\gamma_2 + 1 = 0, \\ 3\alpha_2 - 3\beta_2 + \gamma_2 + 0 = 0, \\ 0\alpha_2 + 0\beta_2 - 2\gamma_2 - 2 = 0. \end{cases}$$

Решения таковы:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\dfrac{1}{6}, \\ \beta_1 = 0, \\ \gamma_1 = \dfrac{1}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_2 = -\dfrac{2}{3}, \\ \beta_2 = -1, \\ \gamma_2 = -1. \end{cases}$$

Поэтому произведения без размерности имеют вид:

$$tv^{-1/6}g^{1/2} \quad \text{и} \quad kv^{-2/3}d^{-1}g^{-1},$$

и решение выразится так:

$$t = v^{1/6}g^{-1/2}f\left(\frac{kv^{-2/3}}{gd}\right),$$

где функция f неопределенна.

Полученный результат несомненно правилен, как ясно из вывода; мы можем достигнуть, однако, и лучшего и добиться формы, где не останется неопределенной функции. Такое улучшение может быть получено увеличением числа основных единиц. Мы были правы, применяя обычные механические единицы, потому что уравнения движения подразумевают динамическую связь между силой, массой и ускорением. Изменение надо внести в направлении, не сразу бросающемся в глаза, поскольку мы привыкли к механическим единицам. Однако после некоторого размышления становится ясным, что в уравнениях движения, управляющих системой, мы не воспользовались тем фактом, что численная мера объема ящика равна кубу длины одного из его ребер. Физически вполне возможно измерять объемы через тот или иной объем, избранный в качестве единицы. Для этого надо разрезать большой объем на меньшие, конгруэнтные с единицей, и сосчитать число таких получившихся объемов. Затем можно доказать, что полученное таким образом число пропорционально кубу числа, измеряющего линейные размеры. Действительно, в этом состоит метод доказательства, принятый первоначально Евклидом при рассмотрении поверхностей и объемов. После того как геометрический факт доказан, естественно определить единицу объема как объем, равный кубу со сторонами, равными единице. Однако такое определение и ограничение имеет цену только для задач, в которых связь между объемом и длиной по существу входит в результат. В нашем случае это не так потому, что объем ящика важен только в сочетании с плотностью жидкости для определения массы ящика. Мы вполне можем измерять длину в этой задаче в дюймах, а объем в квартах, если только одновременно определить плотность как массу на кварту.

Вернемся опять к нашей задаче, считая теперь объем независимой единицей. Мы получаем:

Таблица 8.

Название величины	*Символ*	*Формула размерности*
Упругая поспянная	k	MT^{-2}
Время колебания	t	T
Объем ящика	v	V
Плотность жидкости	d	MV^{-1}
Ускорение силы тяжести	g	LT^{-2}

Теперь у нас пять переменных, но четыре основных единицы, и, следовательно, имеется только одно произведение без размерности. Нас особенно интересует t, мы выбираем показатель при нем равным единице; требуется найти прочие показатели, так чтобы произведение

$$tk^{\alpha}v^{\beta}d^{\gamma}g^{\delta}$$

не имело размерности. Проблема настолько проста, что неизвестные можно указать сразу из простого рассмотрения или же, если угодно, можно выписать уравнение:

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 0, \\ \delta &= 0, \\ -2\alpha - 2\delta + 1 &= 0, \\ \beta - \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Решение этой группы уравнений таково:

$$\alpha = \frac{1}{2}; \quad \beta = -\frac{1}{2}; \quad \gamma = -\frac{1}{2}; \quad \delta = 0.$$

Произведение без размерности принимает вид:

$$tk^{1/2}v^{-1/2}d^{-1/2},$$

и мы имеем

$$t = \mathrm{const}\sqrt{\frac{vd}{k}}.$$

Сведения, содержащиеся в этом решении, очевидно, значительно больше, чем в менее определенном результате, полученном с тремя единицами. Из нового решения видно, например, что время колебания не зависит от ускорения тяжести, физически это, конечно, значит, что тяжесть влияет только на изменение среднего положения равновесия. При возрастании тяжести груз понижается и колеблется относительно положения, более близкого к центру притяжения. Период колебания при этом, однако, не меняется. Этот результат был вовсе не очевиден, или необходим при первой форме решения. Вместе с тем первое решение не противоречит второму, можно достигнуть их тождества, если положить неизвестную функцию равной некоторой постоянной, умноженной на обратный квадратный корень из аргумента.

Вместо увеличения числа основных единиц с трех до четырех, мы могли бы получить тот же результат, заметив, что в уравнениях движения фигурирует только полная масса на конце струны, а следовательно, объем и плотность могут влиять на результат только в виде произведения, т. е. массы. При таком способе решения мы могли бы связать v и d в одну величину и имели бы дело только с четырьмя величинами и тремя основными единицами. Мы получили бы при этом прежний результат. Таким образом, пользуясь специальными данными, касающимися задачи, часто можно получить более детальные сведения, чем при помощи общего анализа.

Если выбрать массу как одну из переменных, результат принимает форму:

$$t = \mathrm{const}\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Еще раз мы получаем произведение без размерности с числом множителей, меньшим нормального.

Рассмотрим теперь задачу, иллюстрирующую неизменность результата при увеличении числа единиц, если одновременно увеличивается число размерных постоянных. Возьмем ту же задачу, как и раньше, с тем различием, что теперь мы будем говорить просто о массе на конце пружины, не детализируя ее как произведение плотности на объем. Переменными будут масса m, время колебания t и упругость пружины k. Ускорение тяжести можно опустить, так как мы уже видели, что оно не влияет на результат. Возьмем пять основных единиц, выбрав помимо обычных массы, длины и времени еще силу и скорость. Задача очевидно механическая, и взаимоотношение между частями системы должно определяться экспериментальным законом пропорциональности силы массе, умноженной на ускорение. Формулируя уравнения движения, мы должны, следовательно, ввести фактор пропорциональности, который появится в виде новой размерной постоянной. Этот фактор связывает силу, массу и ускорение. Но ускорение должно быть определено по-новому, если мы пользуемся скоростью как основной единицей, его размерность будет VT^{-1}. Уравнение движения, написанное так, выражает связь между силой, скоростью и временем. Но сила связана со смещением через упругую постоянную и для решения уравнения требуется соотношение между смещением, скоростью и временем. Разумеется, можно исходить из экспериментального факта наличия пропорциональности между скоростью и отношением пути ко времени. В окончательном результате фактор пропорциональности появится в виде размерной постоянной.

Теперь наша таблица величин закончена, она состоит из трех физических переменных и двух размерных постоянных.

Таблица 9.

Название величины	*Символ*	*Формула размерности*
Время колебания	t	T
Масса на конце пружины	m	M
Упругость пружины	k	$\mathrm{FL^{-1}}$
Размерная постоянная силы	f	$\mathrm{EM^{-1}TV^{-1}}$
Размерная постоянная скорости	v	$\mathrm{L^{-1}TV}$

Здесь F — размерный символ силы, измеряемой в единицах силы и V — размерный символ скорости. Формулы размерности составлены по обычным правилам, можно отметить только, что упругость пружины определена как сила, проявляемая пружиной при растяжении на единицу.

Мы должны теперь найти произведения без размерности, составленные из этих пяти переменных. Прежде всего замечаем, что у нас пять переменных при пяти основных единицах, т. е. вообще говоря, не может быть произведения без размерности. Можно убедиться, однако, составив детерминант показателей формул размерности, что он равен нулю, т. е. в данном частном случае существует произведение без размерности с числом множителей меньше нормального. Разумеется, мы знали об этом заранее, на основании предшествующего анализа. Как и прежде, нас наиболее интересует величина t, и мы выписываем произведение без размерности в такой форме:

$$t\, m^{\alpha}\, k^{\beta}\, f^{\gamma}\, v^{\delta}.$$

Налагая условие отсутствия размерности, находим:

$$\begin{array}{rcc}
\alpha - \gamma = 0 & \text{(условие для} & \text{M)},\\
-\beta - \delta = 0 & \text{»} & \text{L},\\
\gamma + \delta + 1 = 0 & \text{»} & \text{T},\\
\beta + \gamma = 0 & \text{»} & \text{F},\\
\gamma + \delta = 0 & \text{»} & \text{V}.
\end{array}$$

Решая эти уравнения, получаем:

$$\alpha = -\frac{1}{2}; \quad \beta = \frac{1}{2}; \quad \gamma = -\frac{1}{2}; \quad \delta = -\frac{1}{2}.$$

Произведение без размерности принимает вид:

$$tm^{-1/2}k^{1/2}f^{-1/2}v^{-1/2},$$

откуда окончательно:

$$t = \text{const}\sqrt{\frac{mfv}{k}}.$$

Если положить размерные постоянные f и v равными единице, как это имеет место в обычной механической системе единиц, мы получим прежний результат.

Хотя этот пример не дал новых результатов, он поучителен тем, что показывает допустимость любой системы основных единиц при условии введения соответствующих размерных постоянных.

Теперь рассмотрим задачу, в которой выгодно рассматривать силу как первичную величину. Это задача Стокса о маленькой сфере, падающей под действием тяжести в вязкой жидкости. Сфера настолько мала, что движение всюду медленное, и нигде в жидкости не возникает турбулентности. Элементы, с которыми приходится иметь дело в этой задаче, это — скорость падения, плотность сферы, диаметр сферы, плотность жидкости, вязкость жидкости и ускорение силы тяжести. Задача, очевидно, механическая и, применяя обычные механические единицы, мы не будем иметь размерных постоянных. Мы замечаем, однако, что задача для механики несколько необычная. Движение медленное и скорость постоянная, силы, действующие на сферу и жидкость, всюду уравновешиваются силами, вызываемыми вязкостью жидкости, т. е. хотя мы имеем дело с движением, однако задача относится к случаю неускоренного движения, когда силы всюду уравновешиваются.

Поэтому, по существу, задача статическая и, разрешая ее, мы не обязаны пользоваться фактом пропорциональности силы произведению массы на ускорение. Мы можем рассматривать, стало быть, в этой задаче силу как первичную величину, не вводя компенсирующей размерной постоянной.

Переходим к анализу:

Таблица 10.

Название величины	*Символ*	*Формула размерности*
Скорость падения	v	LT^{-1}
Диаметр сферы	D	L
Плотность сферы	d_1	ML^{-3}
Плотность жидкости	d_2	ML^{-3}
Вязкость жидкости	μ	$FL^{-2}T$
Ускорение силы тяжести	g	FM^{-1}

Формула размерности вязкости получается непосредственно из ее определения как силы на единицу площади и на единицу градиента скорости. Ускорение силы тяжести входит с указанной размерностью, потому что в уравнениях движения, очевидно, не найдет отражения ускорительный характер действия тяжести, и войдет только сила, проявляемая тяжестью на единицу массы.

Мы имеем теперь 6 переменных и 4 основных единицы. Следовательно, существуют два произведения без размерности. Одно из них сразу очевидно и равно $\frac{d_2}{d_1}$. Из остающихся величин мы особо заинтересованы в скорости v. Для получения произведения без размерности мы должны только комбинировать ее с четырьмя другими величинами. Выберем D, d_1, μ и g и составим произведение в форме:

$$vD^{\alpha}d_1^{\beta}\mu^{\gamma}g^{\delta}.$$

Сразу видно, что показатели равны:

$$\alpha = -2; \quad \beta = -1; \quad \gamma = 1; \quad \delta = -1$$

и произведения без размерности принимают вид

$$vD^{-2}d_1^{-1}\mu g^{-1} \quad \text{и} \quad \frac{d_2}{d_1}.$$

Окончательное решение таково:

$$v = \frac{D^2\,d_1\,g}{\mu} f\left(\frac{d_2}{d_1}\right).$$

Функция f неопределенна, и мы не можем сказать, как зависит результат от плотностей сферы и жидкости, но мы видим, что скорость падения пропорциональна квадрату диаметра сферы, ускорению силы тяжести и обратно пропорциональна вязкости жидкости.

Эта задача, разумеется, давно решена методами гидродинамики, причем ответ имеет вид (ср. напр. M i l l i k a n, Phys. Rev. 2, 110, 1913):

$$v = \frac{8}{9}\frac{gD^2}{v}(d_1 - d_2).$$

Точное решение получается из более общего, если положить функцию f равной $\frac{8}{9}\left(1 - \frac{d_2}{d_1}\right)$.

Если бы мы решали эту задачу с обычными механическими единицами, в которых сила определена как масса, умноженная на ускорение, мы имели бы вместо двух три произведения без размерности, и окончательный результат выразился бы в такой форме:

$$v = \frac{\mu}{d_1 D}\varphi\left[\left(\frac{d_1}{\mu}\right)^2 D^3 g,\ \frac{d_2}{d_1}\right].$$

Конечно, по такому результату нельзя было бы сказать ничего о влиянии на скорость каждого элемента в отдельности, так как все элементы входят аргументами неопределенной функции.

Есть много задач, в которых конкретные добавочные сведения о природе физической системы так дополняют результаты анализа размерностей, что может быть получена более определенная форма решения, чем на основе одного только анализа размерностей, и несомненно никто нам не запрещает комбинировать анализ размерностей с другими данными, имеющимися в нашем распоряжении.

В виде простого примера рассмотрим вопрос о прогибе балки. Это задача из теории упругости. Попытаемся найти, как зависит «жесткость» балки от ее размеров и других величин.

Уравнения упругости — частный случай уравнений обычной механики, этим определяется механическая система единиц. Уравнения упругости, из которых может быть получено решение, должны включать в себя постоянные упругости материала. Если материал изотропный, то войдут две упругие постоянные, каковыми можно выбрать модуль Юнга и модуль сдвига. Приступаем к анализу.

Таблица 11.

Название величины	*Символ*	*Формула размерности*
Жесткость $\left(\frac{\text{сила}}{\text{прогиб}}\right)$	S	MT^{-2}
Длина	l	L
Ширина	b	L
Высота	d	L
Модуль Юнга	E	$ML^{-1}T^{-2}$
Модуль сдвига	μ	$ML^{-1}T^{-2}$

Имеются 6 переменных и три основных единицы. Соответственно общему правилу должно быть три произведения без размерности. Они могут быть составлены сразу в результате простого рассмотрения:

$$\frac{b}{l}; \quad \frac{d}{l}; \quad \frac{\mu}{E}.$$

Ни одно из этих произведений не содержит S, которая нас наиболее интересует и, следовательно, в задаче есть какая-то особенность. Она действительно и обнаруживается, если вернуться к системе алгебраических уравнений, от которых зависит решение.

Если составить матрицу из коэффициентов, полученных из показателей формул размерностей, то оказывается, что каждый из трехрядных детерминантов, полученных из матрицы, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

Это значит, что в данном частном случае имеется большее число произведений без размерности, чем указывается общим правилом. Это можно было предвидеть заранее. Прежде всего рассмотрение формул размерности показывает, что M и T всегда входят в виде сочетания MT^{-2}, и, следовательно, эта комбинация вместе может считаться за основную единицу. Таким образом, в задаче имеются всего две основных единицы вместо трех и четыре произведения без размерности вместо трех. Далее данная задача относится к статике, в которой масса и время в результат входить не могут. Размерности всех величин должны быть написаны в терминах силы и длины как основных единиц. Это замечание является физическим эквивалентом математическому соображению о том, что M и T всегда встречаются в комбинации MT^{-2} (сила равна MT^{-2}, умноженному на L).

Зная теперь, что существует еще одно произведение без размерности, можно найти пробой, что оно равно

$$\frac{S}{El},$$

и окончательное решение принимает вид:

$$S = Elf\left(\frac{b}{l}, \frac{d}{l}, \frac{\mu}{E}\right).$$

Такое решение не дает возможности сделать выводы о зависимости жесткости от размера балки. Но из элементарных соображений теории упругости ясно, что для тонких балок жесткость должна быть приблизительно пропорциональной ее ширине, при прочих равных условиях. Граничные условия таковы, что решение для балки двойной ширины приближенно может быть получено простым расположением рядом двух одинаковых балок первоначальной ширины. Поэтому f должно иметь такую форму, чтобы $lf\left(\frac{b}{l}, \frac{d}{l}, \frac{\mu}{E}\right)$ приводилось к $b\varphi\left(\frac{d}{l}, \frac{\mu}{E}\right)$, т. е., очевидно, что f должно равняться $\frac{b}{l}\varphi\left(\frac{d}{l}, \frac{\mu}{E}\right)$.

Более ограниченное решение имеет, следовательно, такой вид:

$$S = Eb\varphi\left(\frac{d}{l}, \frac{\mu}{E}\right).$$

Это решение показывает, что балка удвоенной длины будет иметь прежнюю жесткость, если одновременно удвоить ее высоту. Детальное решение, получаемое в теории упругости, показывает, что отношение $\frac{d}{l}$ входит в кубе, в виде множителя, и, следовательно, жесткость балки прямо пропорциональна кубу высоты и ширине, обратно пропорциональна кубу длины и прямо пропорциональна некоторой неизвестной функции упругих постоянных.

Такой метод пополнения результатов анализа размерностей другими сведениями иногда очень полезен. У Рэлея имеются многочисленные примеры этого. Рэлей не всегда разделяет анализ на размерный и какой-либо иной и говорит, что результат может быть доказан анализом размерностей, хотя в действительности требуются те или иные добавочные сведения. Хороший пример этого можно найти в его работе о рассеянии света небом (2). Вывод, что рассеянный свет изменяется обратно пропорционально четвертой степени длины волны падающего света, получается добавлением к анализу размерностей следующего факта: «На основании того, что нам известно о динамике вопроса i (отношение амплитуд падающего и рассеянного света) изменяется пропорционально T (объем рассеивающей частицы) и обратно пропорционально r (расстояния точки наблюдения от рассеивающей частицы)».

До сих пор мы разбирали только механические задачи, но, разумеется, метод не ограничивается только этой областью, он применим к любым системам, законы которых можно выразить в форме, независимой от размера основных единиц измерения.

Рассмотрим, например, задачу из кинетической теории газов и найдем давление идеального газа. Атомы в кинетической теории рассматриваются как совершенные сферы, идеально упругие и обладающие исчезающе малыми размерами в сравнении с их взаимными расстояниями. Единственная размерная постоянная, требующаяся для определения поведения атомов, это их масса. Свойства агрегата таких атомов очевидно характеризуются плотностью газа и числом атомов на единицу объема. Проблема явно механическая, и давление может быть найдено из расчета изменения количества движения атомов, ударяющихся о стенки сосуда в единицу времени и на единицу площади. Механическая система единиц, следовательно, предпочтительна. Однако в добавление к обычным механическим свойствам здесь приходится рассматривать элемент температуры.

Как входит температура в уравнения движения системы? Очевидно, это осуществляется посредством газовой постоянной, которая определяет среднюю кинетическую энергию каждого атома в функции температуры. Наш анализ располагается поэтому так:

Таблица 12.

Название величины	*Символ*	*Формула размерности*
Давление газа	p	$ML^{-1}T^{-2}$
Масса атома	m	M
Число атомов в единице объема	N	L^{-3}
Абсолютная температура	θ	θ
Газовая постоянная на атом	k	$ML^{2}T^{-2}\theta^{-1}$

Мы имеем пять переменных и четыре единицы. Существует, следовательно, одно произведение без размерности. Нас интересует p, поэтому его показатель выбирается равным единице. Мы должны найти произведение:

$$pm^{\alpha}N^{\beta}\theta^{\gamma}k^{\delta}.$$

Решение достигается как всегда. Значения показателей таковы:

$$\alpha = 0; \quad \beta = -1; \quad \gamma = -1; \quad \delta = -1.$$

Произведение без размерности приобретает вид:

$$pN^{-1}\theta^{-1}k^{-1},$$

и окончательное решение будет:

$$p = \mathrm{const} \cdot Nk\theta,$$

т. е. давление пропорционально газовой постоянной, плотности газа, абсолютной температуре и не зависит от массы отдельного атома. Формула для давления, получаемая в кинетической теории, отличается от написанной только тем, что вполне определяется числовое значение константы.

В этой задаче, как и в других проблемах того же типа, мы могли бы, если захотели, исключить температуру как независимую переменную, определив ее как энергию атома. Это вызовет только изменение размера градуса, но не изменит отношения каких-либо двух температур, как это и требуется нашими исходными предпосылками. При таком определении температуры газовая постоянная, разумеется, должна быть положена равной единице.

Мы будем иметь в таком случае три основных единицы и четыре переменные, т. е. снова существует только одно произведение без размерностей, и мы получим прежний результат.

Проследим, однако, это в деталях, что достаточно поучительно.

Таблица 13.

Название величины	*Символ*	*Формула размерности*
Давление газа	p	$\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}$
Масса атома	m	M
Число атомов в единице объема	N	$\mathrm{L^{-3}}$
Абсолютная температура	θ	$\mathrm{ML^{2}T^{-2}}$

Нам нужно найти произведение без размерности:

$$pm^{\alpha}N^{\beta}\theta^{\gamma}.$$

Находим обычным способом показатели:

$$\alpha = 0; \quad \beta = -1; \quad \gamma = -1,$$

и решение задачи имеет вид:

$$p = \text{const} \cdot N\theta.$$

Это решение совпадает с предыдущим, за исключением отсутствия газовой постоянной, но поскольку в новой системе единиц газовая постоянная равна единице, оба решения тождественны, как это и следовало ожидать.

Такая процедура применима, очевидно, к любой задаче, в решение которой входит газовая постоянная. Температуру можно считать независимой единицей, если желательно, чтобы газовая постоянная фигурировала в явной форме, и наоборот, температуру можно определить так, что газовая постоянная будет равной единице, а температура будет иметь размерность энергии. Тот же прием позволителен и в задачах, решение которых не содержит газовой постоянной. Однако определяя в таких задачах температуру как кинетическую энергию атома (или, более обще, энергию, приходящуюся на одну степень свободы) и полагая тем самым газовую постоянную равной единице, мы ограничиваем основные единицы без компенсации. Поэтому результат хотя и будет верным, поскольку температура действительно пропорциональна энергии одной степени свободы, однако он будет давать меньше сведений, чем при меньшем ограничении единиц.

Ясно, что эти замечания непосредственно применимы к задаче Рэлея о теплопроводности, разобранной в вводной главе.

Многие чувствуют какую-то неопределенность в отношении размерности температуры. Это происходит, вероятно, оттого, что на формулу размерности смотрят как на некоторое утверждение о физической природе величины, содержащееся в определении. Абсолютная температура, которую мы только что применяли, есть термодинамическая абсолютная температура, определяемая на основании второго начала термодинамики. Трудно представить себе, каким образом сложный комплекс физических операций, связанный с применением второго начала (в той форме как это дано К е л ь в и н о м при определении абсолютной температуры) может найти отражение в простой формуле размерности. С другой стороны, очевидно, что, например, измерения энергии входят в применения второго начала, и обычные механические единицы, может быть, войдут тем или иным путем в формулы размерности. Но мы видели, что формула размерности только весьма ограниченно отображает различные физические операции, входящие в определение, указывая только изменения числовой меры величины при вариации основных единиц. Легко понять, что всякие операции того же рода, какие применял Кельвин, определяя абсолютную температуру на основе второго начала, не налагают никакого ограничения на число, измеряющее данную конкретную температуру посредством единиц, в которых, например, выражено тепло или энергия.

Величина градуса термодинамической температуры может фиксироваться вполне произвольно; между точкой замерзания и точкой кипения воды можно, например, расположить любое число градусов, совершенно не связывая это с размером каких-либо других единиц. В формуле размерности мы имеем дело с определением на основе второго закона лишь постольку, поскольку это определение удовлетворяет принципу абсолютного значения относительной величины, т. е. принципу, утверждающему, что отношение мер двух конкретных объектов не зависит от размера единиц. Ясно, однако, что термодинамическое определение абсолютной температуры сохраняет отношение двух конкретных температур независимым от размера единиц. Формула размерности температуры поэтому может и не содержать каких-либо иных элементов, и температуре можно приписать ее собственную размерность.

Нет необходимости применять именно абсолютную температуру. Можно, например, определить число градусов в данном температурном интервале как число единиц длины, на которое перемещается по капилляру керосин из бутыли при изменении температуры бутыли. Определенная таким способом температура, очевидно, удовлетворяет принципу абсолютного значения относительной величины, ибо если уменьшить вдвое единицу длины, измеряющей капилляр, то число градусов в каждом температурном интервале соответственно удвоится. Преимущество термодинамической шкалы — в ее простоте. Свойства идеального газа на основе керосиновой шкалы не могут быть характеризованы с помощью одной только постоянной, и уравнения теплопроводности Фурье могут быть написаны с единственным коэффициентом теплопроводности только для очень ограниченной области.

Помимо размерности температуры, есть другой вопрос, связанный с применением анализа размерностей к проблемам термодинамики, который способен привести в смущение. Это вопрос о так называемых логарифмических константах. В курсах термодинамики часто встречаются уравнения, на первый взгляд не являющиеся полными и размерно однородными. Эти уравнения содержат постоянные, которые не могут изменяться по числовой величине на некоторый множитель при перемене размера основных единиц, но изменяются сложением с некоторой величиной. Пример можно найти на стр. 6 лекций Нернста «Применения термодинамики к химии». Там написано уравнение:

$$\lg C = -\frac{\lambda_0}{RT} + \frac{a}{R}\lg T + \frac{b}{R}T + \frac{c}{2R}T^2 - i.$$

В этом уравнении C — концентрация данного газа, λ_0 — некоторое количество тепла, a, b, c — размерные постоянные в обычном смысле (характеризовать их подробно нам нет надобности, можно только указать, что $\frac{a}{R}$ не имеет размерности), а i есть постоянная интегрирования. Ясно, что в написанной форме это уравнение не допускает изменения размера основных единиц путем обычных перемен различных величин. Однако можно так перегруппировать члены, что формула примет обычный вид. Соединим члены $\lg C$, $\frac{a}{R}\lg T$ и i в одно выражение:

$$\lg\frac{C}{T^{a/R}i'}$$

где i' — новая постоянная. Мы получаем таким образом полное уравнение в обычном смысле слова, причем i' имеет размерность такую же, как

$$CT^{-a/R}.$$

Перегруппировки такого рода всегда возможны, если только формула выведена теоретически, как это имеет место в отношении всех формул указанной книги, и поэтому логарифмическая постоянная является только формальным исключением.

Логарифмические постоянные часто встречаются в термодинамических формулах вследствие того, что в большинстве термодинамических выражений фигурирует произвольная постоянная интегрирования, появляющаяся потому, что энергия, работа, энтропия или термодинамический потенциал не имеют абсолютного значения, а суть только разности двух значений; координаты начальной точки, фиксирующей значение энтропии, могут быть, например, выбраны по произволу.

Формулы термодинамики поэтому часто имеют странный вид, заключая конкретные величины с размерностями в аргументах трансцендентных функций. На стр. 5 той же книги Нернста мы находим, например, такую формулу:

$$\lambda = RT^2 \frac{d \lg p}{dT}.$$

Эта формула получается после применения уравнения Клапейрона к веществу, пар которого подчиняется закону идеального газа и имеет объем значительно больший, чем у жидкости. Несмотря на то, что давление стоит под знаком lg, это уравнение, как нетрудно видеть, полное и справедливо для любых размеров основных единиц. Это явствует сразу, если вместо $\frac{d \lg p}{dT}$ написать $\frac{1}{p}\frac{dp}{dT}$, откуда видно, что размерность выражений относительно p равна нулю.

Выражения такого рода, в которых фигурирует логарифм от размерной величины, обычны в термодинамике и часто появляются при применении уравнений идеального газа. Наличие этих логарифмических членов, мне кажется, трудно объяснимо для тех, кто склонен рассматривать формулу размерности как выражение конкретной физической операции над конкретным физическим явлением.

Отсутствие противоречия между такими выражениями и П-теоремой видно из преобразования $\frac{1}{p}\frac{dp}{dT}$. Наклон касательной, $\frac{dp}{dT}$, будет одной из переменных, через которые выражается произведение без размерности, и этот случай не составляет какого-либо исключения. Наша теорема единственно утверждает, что результаты *могут быть выражены* в виде произведений без размерностей. У нас нет никаких оснований предполагать, чтобы человек, получивший формулу, сразу написал ее в таком виде, чтобы это достигалось без некоторой перегруппировки членов.

Закончим главу несколькими примерами из области электричества.

Прежде всего рассмотрим электрическую цепь с емкостью и самоиндукцией; в ней возбуждается электрический разряд. Как зависит период разряда от постоянных цепи?

Решение этой задачи получается из подробного рассмотрения уравнений электрической цепи, написанных в обычной форме в электромагнитных единицах. В уравнении не учитываются электростатические действия тока и взаимодействия с магнитами. Уравнение имеет такой вид:

$$L\frac{di}{dt} + \int \frac{idt}{c} = 0.$$

При установлении основных единиц для этого уравнения, очевидно, достаточно рассмотреть только три величины, именно количество электричества, время и энергию. Ток определяется как количество электричества на единицу времени, коэффициент самоиндукции определяется тем, что при умножении на $\frac{i^2}{2}$, он дает энергию; аналогично емкость, деленная на квадрат заряда, дает энергию.

Приступаем к обычному анализу:

Таблица 14.

Название величины	*Символ*	*Формула размерности*
Количество электричества	q	Q
Ток	i	$\mathrm{QT^{-1}}$
Коэффициент самоиндукции	L	$\mathrm{Q^{-2}T^2E}$
Емкость	c	$\mathrm{Q^2E^{-1}}$
Период	t	T

Период колебания должен, очевидно, зависеть от констант цепи и начального заряда конденсатора. Иначе говоря, нужно иметь связь между q, L, c и t. Нас интересует t, поэтому попробуем найти произведение без размерности такого вида:

$$tL^{\alpha}c^{\beta}q^{\gamma}.$$

Сразу получаем показатели:

$$\alpha = -\frac{1}{2}; \quad \beta = -\frac{1}{2}; \quad \gamma = 0,$$

откуда

$$t = \mathrm{const}\sqrt{Lc}.$$

Это, разумеется, то же решение, которое мы нашли бы, действительно решая уравнение цепи, за исключением неопределенного значения постоянной нашего решения. Заметим, что начальный заряд в решение не входит. Эта задача, очевидно, является электрическим аналогом механической задачи о маятнике.

Полезно отметить еще раз, что для применения анализа размерностей с пользой и в этом случае потребовались некоторые сведения о характере решения. Новичок, приступая к этой задаче впервые, пытался бы искать соотношение размерности времени с постоянными цепи, мгновенным током и зарядом в конденсаторе. Из таблицы переменных он нашел бы, что $\frac{q}{i}$ также имеет размерность времени, и его решение имело бы такую форму:

$$t = \sqrt{Lc}\, f\left(\frac{i^2 Lc}{q^2}\right).$$

Это правильно, так как приводит к прежнему результату, если положить f постоянной. Но такое решение дает меньше сведений, чем прежнее.

Теперь рассмотрим одну задачу из электростатики. Концепция среды, введенная Фарадеем, позволяет считать среду местом основных свойств электростатического поля, причем условия в среде в любой момент однозначно определяются электрическим вектором в этой точке. Найдем связь между пространственной плотностью энергии в электростатическом поле и силой поля. Поскольку эта задача статическая, явление может быть описано при помощи двух основных единиц — силы и длины. Далее, уравнения поля в электростатике не содержат размерных постоянных, и скорость света не должна входить в результат, как это наоборот было в задаче о массе сферически распределенного заряда. На основе двух единиц, силы и длины, мы можем ввести следующие определения. Единица электростатического заряда есть заряд, который на расстоянии, равном единице от такого же заряда в пустом пространстве, проявляет силу, равную единице. Электрический вектор есть вектор, который при умножении на заряд дает силу, действующую на заряд. Диэлектрическая постоянная есть отношение силы между двумя зарядами соответственно в пустом пространстве и в рассматриваемой среде. Размерность диэлектрической постоянной очевидно равна нулю. Размерность энергии при этой системе единиц, разумеется, равна силе, умноженной на расстояние.

Формулируем теперь задачу:

Таблица 15.

Название величины	*Символ*	*Формула размерности*
Заряд	e	$\mathrm{F}^{1/2}\mathrm{L}$
Сила поля	E	$\mathrm{F}^{1/2}\mathrm{L}^{-1}$
Плотность энергии	u	FL^{-2}

Мы ищем связь между E и u. Вообще говоря, такой связи не должно бы существовать, потому что у нас имеются две основных величины при двух переменных. Но при специальных условиях этой задачи такая связь все же существует, и результат, как явствует сразу, выражается так:

$$u = \mathrm{const} \cdot E^2.$$

В электростатике доказывается, что постоянная равна $\frac{1}{2}$.

Если бы вместо плотности энергии в пустом пространстве мы пожелали бы найти плотность энергии в среде с диэлектрической постоянной ε, то приведенный результат изменился бы вследствие появления нового множителя, некоторой произвольной функции от ε. Анализ размерностей не может раскрыть вид этой функции. Из других источников мы знаем, что функция равна самой диэлектрической постоянной.

Эта задача поучительна тем, что показывает разнообразие способов, которыми могут быть выбраны основные единицы. Поскольку задача может быть сведена к формулировке в механических терминах (определение электрических величин даются непосредственно через механические величины), мы можем пользоваться обычными тремя механическими единицами как основными и писать формулы размерности в терминах массы, длины и времени. В таком случае, мы получили бы такую формулировку:

Таблица 16.

Название величины	*Символ*	*Формула размерности*
Заряд	e	$\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{L}^{3/2}\mathrm{T}^{-1}$
Сила поля	E	$\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{L}^{-1/2}\mathrm{T}^{-1}$
Плотность энергии	u	$\mathrm{M}\mathrm{L}^{-1}\mathrm{T}^{-2}$

Снова ищем соотношения между плотностью энергии и силой поля. Теперь у нас две переменные и три основных единицы и по общим правилам произведение без размерности невозможно, а следовательно, невозможно и искомое соотношение. Однако связь между показателями такова, что произведение без размерности осуществляется, оно такое же, как и раньше. Новая формулировка в других основных единицах не изменяет результата, как этого и следовало ожидать.

Многие будут критиковать написанные формулы размерностей для электростатических величин на том основании, что диэлектрическая постоянная пустого пространства произвольно положена равной единице, хотя мы ничего не знаем о ее природе. Вследствие этого мы опускаем некоторые размерности, которые существенны для полной постановки проблемы. Такая точка зрения не собьет читателя этой книги, усвоившего, что в размерностях нет ничего абсолютного, что размерности могут быть любыми, лишь бы они согласовались с определениями, соответствующими экспериментальным фактам. Разберем этот вопрос, однако, на конкретном примере, включающем диэлектрическую постоянную пустого пространства в явной форме как новый вид основной величины, которую нельзя выразить через массу, длину и время. Обозначим ее через k, применяя ту же букву и в формуле размерности.

Единица электростатического заряда определится теперь уравнением:

$$\text{сила} = \frac{e^2}{kr^2}.$$

Сила поля определится, как и раньше, выражением

$$eE = \text{сила}.$$

Если формулировать задачу в терминах этих основных величин, то k явно появится в уравнениях электростатического поля, и размерная постоянная k войдет в таблицу переменных. Задача формулируется теперь так:

Таблица 17.

Название величины	*Символ*	*Формула размерности*
Заряд	e	$\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{L}^{3/2}\mathrm{T}^{-1}\mathrm{k}^{1/2}$
Сила поля	E	$\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{L}^{-1/2}\mathrm{T}^{-1}\mathrm{k}^{-1/2}$
Плотность энергии	u	$\mathrm{M}\mathrm{L}^{-1}\mathrm{T}^{-2}$
Диэлектрическая постоянная пустого пространства	k	k

Снова составляем произведение без размерности из величин E, u, k. Получаем результат:

$$u = \mathrm{const} \cdot kE^2.$$

Это сводится к прежнему выводу, если положить $k = 1$, как и делалось в предыдущей формулировке задачи. На первый взгляд новая форма кажется более общей, так как она содержит множитель k. Однако этот множитель ничего нового не говорит о природе постоянной, он показывает только, как меняется формальное выражение результата при изменении определений, положенных в основу нашей системы уравнений. Включение множителя k в результат и в определения не имеет поэтому для нас преимуществ и не может их иметь, если только наши соображения правильны.

Очень много писалось об «истинной» размерности k и было высказано немало догадок о различных физических моделях, механической структуры эфира, вытекающих из тех или иных предположений об «истинной» размерности. Но, насколько я осведомлен, никто не добился этим методом результата, который привел бы к открытию новых фактов, хотя нельзя отрицать, что соображения такого рода побуждали к ряду опытов, как, например, это имело место в опытах Лоджа, касающихся механических свойств эфира.

Литература

[1] Rayleigh. Nature. **95**, 66, 1915.

[2] Rayleigh. Phil. Mag. **41**, 107, 274, 1871.

Несколько разнообразных примеров разобрано в статье C. Runge Phys. ZS. **17**, 202, 1916.

Спекуляции о «правильной» размерности электрических величин и выводы на этой основе о свойствах эфира можно найти в следующих статьях:

A. W. Rücker. Phil. Mag. **27**, 104, 1889.

W. Williams. Phil. Mag. **34**, 234, 1892.

O. Lodge. Phil. Mag. Ноябрь 1882.

Nature. 19 июля 1888.

Книга «Modern Views in Electricity» (добавление).

R. A. Fessenden. Phys. Rev. **10**, 1 и 83, 1900.

K. R. Johnson. Phys. ZS. **5**, 635, 1904.

A. C. Crehore. Phys. Rev. **14**, 440, 1919.

G. F. Fitzgerald. Phil. Mag. **27**, 323, 1889.

Приводим полную цитату из последней статьи: «За последнее время некоторое внимание было обращено на вопрос о размерности электромагнитных единиц, однако, по-видимому, забыли следующее:

Электростатическая система единиц может быть определена как система, в которой предположено, что диэлектрическая постоянная имеет нулевую размерность, а электромагнитная система — как система, в которой магнитная проницаемость положена имеющей нулевую размерность. Если взять систему, в которой размерности обеих этих величин одинаковы и равны размерности величины обратной скорости (TL^{-1}), то обе системы делаются тождественными в отношении размерности, отличаясь только числовым коэффициентом, точно так же, как отличаются сантиметры и километры. Этот результат кажется естественным и оправдывающим предположение о том, что диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость обладают природой величины обратной скорости. Возможно, что они связаны с обратной величиной квадратного корня из энергии эфирного вихря».

Глава 7

Применения анализа размерности к модельным опытам. Другие технические приложения

До сих пор мы применяли анализ размерностей к задачам, которые могут быть разрешены и другими способами, поэтому имелась возможность проверять наши результаты. В инженерной практике встречается большое число задач, настолько сложных, что точное решение их неосуществимо. При этих условиях анализ размерностей дает возможность получить некоторые сведения о форме результата, которого можно достигнуть на практике, только экспериментируя с необычайно большим количеством аргументов неизвестных функций. Для применения же анализа размерностей требуется только знать, с какой системой мы имеем дело и каковы переменные, входящие в уравнение; нет надобности даже выписывать уравнения в развернутой форме, еще менее нужно их решать. Во многих случаях такого рода частичные сведения, достигаемые посредством анализа размерностей, можно комбинировать с измерениями, касающимися только части всей физической системы, охватываемой анализом. Таким образом все нужные данные получаются со значительно меньшими заботами и затратами, чем без анализа размерностей. Этот метод приобретает все большее значение при технических исследованиях и за последнее время получил особое развитие в связи с нуждами самолетостроения. Метод широко применяется в Национальной физической лаборатории в Англии и в Бюро стандартов САШ и изложен в многочисленных статьях. В Бюро стандартов особенно активен в этом направлении др. Эдгар Бэкингэм, ему удалось дать результатам анализа размерностей такую форму, которая легко применима и уже привела к ряду важных результатов.

Характер получаемых этим методом результатов можно иллюстрировать очень простым примером. Положим, требуется построить очень большой маятник с весьма точно определенным периодом колебаний.

Анализ размерностей показывает, что время колебания всей системы маятника определяется формулой

$$t = \mathrm{const}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Поэтому для определения периода какого угодно маятника достаточно определить на опыте только значение константы, входящей в уравнение. Очевидно, что эта константа может быть найдена из единственного опыта с маятником любой длины. Экспериментальный маятник может быть сделан очень простым, и по измерению периода его колебания получится период проектируемого большого маятника.

Случай маятника особенно прост тем, что в результат не вошла произвольная функция. Теперь рассмотрим более общий случай, усложненный наличием такой функции. Обозначим переменные задачи буквами Q_1, Q_2, Q_3 и т. д. и предположим, что произведения, не имеющие размерности, найдены и приведены к такому виду

$$Q_1 = Q_2^{\alpha_1} Q_3^{\beta_1} \ldots f(Q_2^{\alpha_2} Q_3^{\beta_2} \ldots,\ Q_2^{\alpha_3} Q_3^{\beta_3} \ldots).$$

При этом аргументы функции и множитель, стоящий отдельно, охватывают все произведения без размерности, т. е. результат дан в общем виде. При переходе от одной физической системы к другой произвольная функция, вообще говоря, меняется неизвестным нам образом. Поэтому опыты со случайными моделями дадут мало полезных сведений. Если, однако, модель выбрать так, чтобы все аргументы неизвестной функции имели одно и то же значение как для модели, так и для оригинала, то при переходе от модели к оригиналу будут меняться только множители, стоящие перед символом функции. Способ изменения этих множителей дается анализом размерностей.

Две системы, связанные одна с другой так, что аргументы неизвестной функции в обеих одинаковы, называются ф и з и ч е с к и п о д о б н ы м и с и с т е м а м и.

Очевидно, что опыты с моделью могут дать ценные сведения, если модель конструирована физически подобной оригиналу. Условие физического подобия включает, вообще говоря, не только размеры модели, но и все прочие физические переменные.

В виде примера рассмотрим сопротивление, испытываемое телом некоторой определенной формы при движении в бесконечной массе жидкости. Частными случаями этой задачи являются сопротивления, встречаемые снарядом, аэропланом, подводной лодкой в глубоком море или падающей водяной каплей. Проблема, очевидно, механическая и связана с уравнениями гидродинамики. Условия задачи чрезвычайно сложны, их трудно формулировать в точной математической форме, но можно вообразить себе, что они кем-то осуществлены. Важно отметить, что в уравнениях гидродинамики нет размерных постоянных, если только применены обычные механические единицы массы, длины и времени; результат будет содержать поэтому только измеряемые физические переменные.

Такими переменными являются: сопротивление движению, скорость движения, форма тела, которая может быть характеризована некоторыми абсолютными размерами и их отношением к некоторым другим длинам (например, форма эллипсоида может быть характеризована длиной наибольшей оси и отношением к ней других осей) и постоянными жидкости, т. е. плотностью, вязкостью и сжимаемостью. Вместо последней величины можно ввести скорость звука в жидкости. Мы предполагаем, что тяжесть в результат не входит, т. е. что тело находится в состоянии равномерного движения на постоянном уровне, и работы под действием силы тяжести не совершается. Формулируем задачу.

Таблица 18.

Название величины	*Символ*	*Формула размерности*
Сопротивление	R	MLT^{-2}
Скорость	v	LT^{-1}
Абсолютный размер	l	L
Плотность жидкости	d	ML^{-3}
Вязкость жидкости	μ	$\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1}$
Скорость звука в жидкости	v'	LT^{-1}
Факторы формы, фиксирующие форму тела	$r_1, r_2, \ldots$	0

Мы имеем, следовательно, 6 переменных, не считая факторы формы, число которых может быть каким угодно в зависимости от геометрической сложности тела. Таким образом, должны существовать три произведения без размерности помимо факторов формы, которые сами по себе не имеют размерности. Одно из таких произведений, как непосредственно видно, есть $\frac{v'}{v}$. Мы должны разыскать остальные произведения без размерности способом, наиболее подходящим к конкретной задаче. Нас интересует сопротивление движению, мы выберем для него поэтому показатель, равный единице, и выделим R изолированно в левой части уравнения. При помощи метода, которым мы уже пользовались много раз, мы находим произведения без размерности в виде таких выражений:

$$Rv^{-2}l^{-2}d^{-1} \quad \text{и} \quad \mu v^{-1}l^{-1}d^{-1};$$

окончательное решение имеет такую форму:

$$R = v^2 l^2 d f\left(\frac{\mu}{vld}, \frac{v'}{v}, r_1, r_2, \ldots\right).$$

Эта формула весьма обща и охватывает широкую группу экспериментальных условий. Если скорость мала, то проблема сводится к задаче о равновесии сил, действующих на твердое тело в жидкости, и сил, определяемых вязкостью жидкости. Сопротивление в этом случае не зависит от плотности жидкости и от скорости звука в ней. Если плотность исчезает из уравнения, то аргумент $\frac{\mu}{vld}$, очевидно, должен выйти из-за знака функции в виде множителя, и для медленного движения закон сопротивления принимает следующую форму:

$$R = vl\mu f(r_1, r_2, \ldots).$$

Таким образом, при малых скоростях сопротивление пропорционально вязкости, скорости и линейным размерам и помимо этого зависит только от геометрической формы тела. Мы уже имели дело с частным случаем этой задачи в вводной главе при разборе проблемы Стокса о движении сферы.

В области больших скоростей плотность жидкости играет важную роль, так как часть силы, действующей на тело, определяется моментом, отводящимся от поверхности тела жидкостью в форме вихрей (этот отводимый момент, очевидно, зависит от плотности жидкости). При этом скорость звука еще не сказывается на результате, т. е. среда ведет себя все еще подобно несжимаемой жидкости. Эта область скоростей особенно важна для самолетов. При этих условиях аргумент $\frac{v'}{v}$, очевидно, выпадает из функции, и результат приобретает вид:

$$R = v^2 l^2 d f\left(\frac{\mu}{lvd}, r_1, r_2, \ldots\right).$$

Остановимся на этой стадии и посмотрим, какие сведения дает нам это уравнение относительно возможных опытов с моделями. Наша цель — измерить сопротивление, испытываемое моделью при определенных условиях, и вывести отсюда заключение о сопротивлении, встречаемым подлинным объектом. Прежде всего ясно, что неизвестная функция, а следовательно, и все ее аргументы, т.е. $r_1, r_2, \ldots$ и отношение $\frac{\mu}{vld}$, должны иметь одно и то же значение для модели и оригинала. Из одинаковости $r_1, r_2, \ldots$ вытекает геометрическое подобие модели и оригинала. Из одинаковости $\frac{\mu}{vld}$ следует, что если опыт с моделью производится, как обычно, в воздухе, то μ и d одинаковы для модели и оригинала, поэтому vl должно быть одним и тем же. Это значит, что если модель по линейным размерам в десять раз меньше оригинала, то ее скорость должна быть в десять раз больше. Это требование практически крайне затруднительно, оно равносильно осуществлению скоростей модели порядка тысяч километров в час, поэтому на первый взгляд кажется, что мы докатали невозможность модельных опытов такого рода. Но практически функция от $\frac{\mu}{vld}$ оказывается обладающей такими специальными свойствами, что все же из опыта с моделью можно получить важные данные. Если производить измерения сопротивления, испытываемого моделью, при различных скоростях и вычислять соответствующие значения функции (разделяя измеренные сопротивления на $v^2 l^2 d$), то оказывается, что при больших скоростях функция f асимптотически приближается к постоянному значению. Это значит, что при больших скоростях сопротивление становится постепенно пропорциональным квадрату скорости. Поэтому достаточно осуществить модельный опыт при скоростях, при которых можно найти асимптотическое значение функции, так как тем самым получатся все необходимые сведения о свойствах оригинала. Это возможно потому, что нам известна пропорциональность сопротивления квадрату скорости, а модельный опыт дает значение фактора пропорциональности. Единственный сомнительный пункт предлагаемого приема заключается в том, возможно ли достигнуть с моделями скоростей, достаточных для определения асимптотического значения. Опыт подтверждает эту возможность.

Тот факт, что при скоростях современных аэропланов сопротивление становится пропорциональным квадрату скорости, показывает на основании анализа, что вязкость перестает играть доминирующую роль. Это значит, что вся работа перемещения аэроплана тратится на создание воздушных вихрей. В анализе независимость от вязкости и полная турбулентность рассматриваются как эквиваленты. Эта точка зрения на явление подтверждается опытом с различных сторон.

Рассмотрим возможность осуществления модельных опытов в других средах, помимо воздуха. Выбрав в качестве среды для модели воду, мы должны дать модели такие размеры и скорость, чтобы $\frac{\mu}{vld}$ для модели равнялось $\frac{\mu}{vld}$ для оригинала. Для воды $\mu \sim 10^{-2}$, $d = 1$, в то время как для воздуха $\mu = 1,7 \cdot 10^{-4}$ и $d = 1,29 \cdot 10^{-3}$ (при комнатной температуре). При подстановке этих значений мы получим, что vl для модели должно составлять около $\frac{1}{13}$ той же величины для оригинала. Этот фактор подходит для сокращенных размеров модели, однако при этом модель должна бы двигаться в воде с такой же скоростью, как оригинал в воздухе. Такие большие скорости в воде затруднительны и поэтому, по-видимому, нет преимущества применения воды в сравнении с воздухом при пользовании вышеуказанным приемом.

Перейдем теперь к еще бóльшим скоростям, как, например, скорость снаряда, которая может быть больше, чем скорость звука в среде. При этом среда с трудом успевает разойтись перед телом, и возникают эффекты нового характера. При таких скоростях вязкость совершенно исчезает из результата, который теперь принимает форму:

$$R = v^2 l^2 d f\left(\frac{v'}{v},\, r_1,\, r_2,\, \ldots\right).$$

Если для этих условий производить модельный опыт, то ясно, что модельный снаряд должен иметь форму оригинала, и помимо того $\frac{v'}{v}$ должно иметь одно и то же значение для модели и оригинала. Если модельный опыт производится в воздухе, то v' для модели будет тем же самым, как и для оригинала, следовательно, и v должно быть такое же. Иначе говоря, оригинал и модель должны двигаться с одинаковой скоростью. При этих условиях формула показывает, что сопротивление пропорционально поперечному сечению снаряда. Требование равенства скоростей модели и оригинала практически означает, что модельные опыты нужно производить также с действительными снарядами, но меньшего калибра.

Можно пытаться избежать этого затруднения, производя опыт в другой среде, например в воде. Но скорость звука в воде примерно в пять раз больше, чем в воздухе, следовательно, потребовалась бы скорость снаряда, в пять раз превосходящая скорость снаряда в воздухе, требование — явно неосуществимое.

Помимо применений к модельным опытам, результаты анализа размерностей могут быть применены и к другим техническим областям. В Бюро стандартов они многократно применялись при изучении различных видов технических инструментов. Группа инструментов, предназначенных для одной и той же цели, имеет много общих черт, и часто возможно произвести детальный анализ, применимый ко всем инструментам данного типа. Анализ размерностей дает некоторые сведения о возможных результатах такого детального анализа, и на основании свойств одного инструмента можно сделать выводы, касающиеся других инструментов несколько иной конструкции. Этот вопрос разобран с большой полнотой и рядом примеров в цитированной ниже второй работе Герсея.

Литература

Применения анализа размерностей к техническим задачам можно найти в следующих статьях:

O. Reynolds, Phil. Frans. Roy. Soc. **174**, 935, 1883.

Rayleigh. Phil. Mag. **34**, 59, 1892 и **8**, 66, 1904.

E. Buckingham. Phys. Rev. **4**, 345, 1914; Trans. Amer. Soc. Mech. Eng. **37**, 263, 1915; Engineering, Март 13, 1914.

E. Buckingham and J. D. Edwards. Scient. Papers of Bureau of Stand. № 359, 1920.

M. D. Hersey. Journ. Wash. Acad. **6**, 569, 1916; Scient. Pap. of Bureau of Stand. № 331, 1919; Aeronautical Instruments Circulars of the Bureau of Standards № 30, 1919 и № 32, 1918.

W. L. Cowley and H. Levy. Aeronautics in Theory and Experiment. Longmans, Green and Co, гл. IV, 1918.

E. B. Wilson., Aeronautics, John Wiley and Sons, гл. 11, 1920.

F. Merkel. Grundgesetze der Wärmeübertragung. Dresden u. Leipzig. стр. 21, 1927.

W. Soldau. Über Geschwindigkeitsformeln. Mitteil. d. Landesanstalt f. Gewässerkunde und Hauptnivellements in Preuss. Minist. f. Landwirtschaft, Domänen und Forsten. Том VII, тетр. 1, 1931.

R. Esnaul–Pelterie. Sur l'application de l'analyse dimensionelle a l'étude de l'ecoulement turbulent. C. R. **196**, 1968, 1933.

von Kármán. Gött. Nachr. 547 (1912), см. также Abhandlungen aus der Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschale. Aachen.

Глава 8
Применения анализа размерностей к теоретической физике

Методы анализа размерностей должны играть более важную роль в теоретическом исследовании, чем это имело место до сих пор. Ни один исследователь не должен бы позволять себе переходить к детальному решению задачи, не произведя предварительного анализа размерностей, касающегося характера решения, и не убедившись обращением к данным опыта, что точка зрения, положенная в основу составляемых уравнений, допустима.

Вероятно, наибольшее затруднение в теоретических задачах вызывал вопрос о размерных постоянных. Но именно в области теоретических исследований скорее всего можно ожидать появления размерных постоянных. Не имея ясного представления о природе этих постоянных и о том, когда следует ждать их появления, естественно сомневаться в применимости метода. Но после разбора на предшествующих страницах вопрос о размерных постоянных может без затруднений решаться в любых специальных задачах.

Неопределенность числового фактора пропорциональности также часто воспринимается как недостаток анализа размерностей, однако во многих теоретических задачах часто возможно получить сведения о порядке величины результата. Наше рассмотрение анализа размерностей показывает, что числовые коэффициенты в конечном результате суть итоги математических операций над подлинным уравнением движения (в общем смысле) системы. *Известно, однако, на основании большой практики, что такие математические операции не проводят к появлению ни очень больших, ни очень малых числовых факторов.* Большие и малые числа в наших уравнениях почти всегда являются итогом подстановок числовых значений некоторых физических величин, например числа атомов в кубическом сантиметре, электростатического заряда электрона или скорости света. Если сохранить за этими величинами буквенное обозначение, то, применяя анализ размерностей, можно рассчитывать на то, что остальные числовые коэффициенты не будут большими или малыми.

Это наблюдение можно и обратить. Предположим, что мы подозреваем наличие связи между некоторыми величинами, но еще не достаточно знаем физическую систему, чтобы написать соответствующее уравнение, или даже не уверены в том, какие элементы должны войти в уравнение. Мы предполагаем, что между некоторыми величинами существует соотношение, а затем при помощи анализа размерностей находим форму этого соотношения. Подставляем затем в соотношение числовые значения физических величин и таким образом находим числовую величину неизвестного коэффициента. Если этот коэффициент имеет величину порядка единицы (что иногда, при достаточной снисходительности, может означать только, что коэффициент не является величиной порядка 10^{10}), то подозреваемое соотношение считается правдоподобным, и мы продолжаем работать в этом направлении, разыскивая точную связь между элементами. Если, наоборот, коэффициент оказывается очень большим или очень малым, мы отказываемся от нашего предположения как от невероятного.

Изложение этого метода и один интересный пример были даны Эйнштейном (1) на заре изучения удельных теплот твердых тел и связи их с квантовыми явлениями.

Вопрос заключался в том, не служат ли междуатомные силы, определяющие обычные упругие свойства твердых тел, также и силами, от которых зависят характеристические частоты в инфракрасном спектре. Это предположение, разумеется, имело важное значение для всей концепции сил в твердом теле и для вопроса о природе тепловых и оптических колебаний.

Для грубого, приближенного анализа можно представить себе твердое тело, как чередование атомов, расположенных по вершинам кубов. Для анализа нам, очевидно, нужно знать массу атомов и их расстояние друг от друга (или число атомов в *куб. см.*). Далее, если наше предположение о природе сил правильно, то эти силы достаточно характеризовать некоторой упругой постоянной, в качестве каковой выберем сжимаемость. Эти элементы достаточны для определения инфракрасной характеристической частоты. Производим обычный анализ задачи.

Таблица 19.

Название величины	*Символ*	*Формула размерности*
Характеристическая частота	ν	T^{-1}
Сжимаемость	K	$\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}\mathrm{T}^{2}$
Число атомов в *куб. см*	N	L^{-3}
Масса атома	m	M

Должно существовать одно произведение без размерности относительно этих величин. Оно равно $K\nu^2 N^{1/3} m$.

Поэтому окончательный результат имеет вид:

$$K = \mathrm{const} \cdot \nu^{-2}\ N^{-1/3} m^{-1}.$$

Возьмем числовые величины, относящиеся к какому-нибудь действительному веществу, и, подставив в уравнение, найдем значение постоянной. Для меди $K = 7 \cdot 10^{-13}$, $\nu = 7{,}5 \cdot 10^{12}$, $m = 1{,}06 \cdot 10^{-22}$ и $N = 7{,}5 \cdot 10^{22}$. При подстановке этих чисел получаем $0{,}18$, т. е. величину порядка единицы в согласии с предположением.

Конечно, в настоящее время этот результат представляет только исторический интерес; как основа теории теплоемкости твердого тела Дебая, он памятен блестящим подтверждением на опыте.

Другой пример аргументации такого рода относительно величины постоянных дан Джинсом (2). Вопрос заключался в том, переживала ли Земля за время своей истории состояние гравитационной неустойчивости и имела ли эта неустойчивость какое-нибудь действительное отношение к ходу эволюции. Предварительное исследование по методу размерностей показало Джинсу, какова должна быть форма связи между такими переменными как средняя плотность, радиус, упругие постоянные и пр. в момент гравитационной неустойчивости. Последующая подстановка числовых значений для Земли дала коэффициент порядка единицы. Это предварительное рассмотрение, таким образом, показало наличие основания в предположении о роли гравитационной неустойчивости в истории Земли. На этой основе можно было приступить к детальному исследованию проблемы.

Рассмотрим еще пример такой же аргументации, на этот раз с отрицательным результатом. Попытаемся построить электродинамическую теорию тяготения, полагая, что гравитационное поле, связанное неизвестным нам образом со свойствами электрона, может быть получено применением электродинамических уравнений поля. В этих уравнениях имеется одна размерная постоянная c, отношение электромагнитных единиц к электростатическим. Известно, что c имеет размерность скорости и численно совпадает со скоростью света.

В поисках предполагаемой связи мы рассматриваем заряд и массу электрона, характеризующие его свойства, скорость света и гравитационную постоянную. Производим анализ.

Таблица 20.

Название величины	*Символ*	*Формула размерности*
Постоянная тяготения	G	$\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^{3}\mathrm{T}^{-2}$
Заряд электрона	e	$\mathrm{M}^{1/2}\mathrm{L}^{3/2}\mathrm{T}^{-1}$
Масса электрона	m	M
Скорость света	c	LT^{-1}

У нас четыре переменных и три основных единицы, следовательно, мы ожидаем единственное произведение без размерности. Это очевидно Gm^2e^{-2}, т. е скорость света в гипотетическое соотношение не входит. Окончательный результат имеет многозначительную простую форму:

$$G = \text{const} \cdot \left(\frac{e}{m}\right)^2.$$

Подставляем числовые значения:

$$G = 6{,}658 \cdot 10^{-8}, \quad \frac{e}{m} = 5{,}3 \cdot 10^{17},$$

следовательно, постоянная равна $2{,}35 \cdot 10^{-43}$.

Постоянная оказывается непозволительно малой, и мы отказываемся от предполагаемого соотношения, хотя простота размерного соотношения и останавливает внимание[1].

[1]Таблица, положенная в основу рассуждения, не полна, не включен «спин» электрона равный $\dfrac{1}{2}\dfrac{h}{2\pi}$ (h — квантовая постоянная), определяющий магнитные его свойства. Добавление «спина» дает простор составлению других произведений без размерности, связанных или несвязанных с постоянной тяготения, например $\dfrac{e^2}{hc}$ (величина порядка 10^{-3}), $h^4m^{-2}g^{-1}$ (величина порядка 10^{-49}) и т. д. Составляемые произведения оказываются или весьма далекими от единицы по числовому значению, или же близкими к ней $\left(\text{например, } \dfrac{hc}{2\pi ge}\right)$, но имеющими размерность. *Прим. ред.*

Поэтому идентичность формул размерности не должна считаться априорным показателем существования физической связи. При существовании стольких разнообразных видов физических величин, выраженных при помощи немногих основных единиц, вполне возможны всякие случайные соотношения между ними. Без дальнейшего исследования нельзя сказать, реально размерное соотношение или случайно? Так, например, сам по себе факт совпадения размерности кванта действия и углового момента еще не дает права предполагать наличие механизма, объясняющего квант тем или иным вращательным движением.

Обратное утверждение, однако, всегда справедливо. Если существует истинная физическая связь между некоторыми величинами, тогда имеет место и соотношение размерностей. Этот вывод может служить полезным орудием исследования.

Рассмотрим задачу, показывающую, что всякое действительное физическое соотношение предполагает и размерное соотношение. Предположим, что мы пытаемся построить теорию теплопроводности и разыскиваем связь между механизмом теплопроводности и механизмом, определяющим обычные термодинамические свойства вещества. Эти свойства можно конкретизировать как сжимаемость, тепловое расширение, удельную теплоту (все на единицу объема) и абсолютную температуру. Если только эти стороны механизма, регулирующие термодинамические свойства, одновременно определяют и теплопроводность, тогда возможно найти размерную связь между термодинамическими элементами и теплопроводностью. Формулируем задачу.

Таблица 21.

Название величины	*Символ*	*Формула размерности*
Теплопроводность	μ	$\mathrm{MLT}^{-3}\theta^{-1}$
Сжимаемость на единицу массы	k	$\mathrm{M}^{-2}\mathrm{L}^{4}\mathrm{T}^{2}$
Тепловое расширение на единицу массы	λ	$\mathrm{M}^{-1}\mathrm{L}^{3}\theta^{-1}$
Удельная теплота на единицу массы	c	$\mathrm{L}^{2}\mathrm{T}^{-2}\theta^{-1}$
Абсолютная температура	θ	θ

Надо найти произведение без размерности из этих переменных. У нас пять переменных и четыре основных единицы, поэтому можно ожидать единственного произведения без размерности. Нас интересует μ, полагаем поэтому показатель его в произведении равным единице.

Произведение имеет вид:

$$\mu k^{\alpha}\lambda^{\beta}c^{\gamma}\theta^{\delta}.$$

Пробуем определить показатели обычным путем. Мы встречаемся, однако, с затруднением: уравнения оказываются не совместными друг с другом. Мы проверяем это, составляя детерминант показателей в формулах размерностей k, λ, c и θ. Детерминант оказывается равным нулю, т. е произведения без размерности не существует. Поэтому можно заключить, что гипотетической связи между теплопроводностью и термодинамическими свойствами нет, и твердое тело должно обладать еще другими свойствами помимо тех, которые достаточны для термодинамики.

Переходим к простому анализу проблемы излучения черного тела. Более подробно задача рассмотрена у Джинса (3). Статья Джинса интересна также тем, что он пользуется системой электрических единиц, в которой диэлектрическая постоянная пустого пространства вводится в явной форме. Легко видеть, однако, после некоторого размышления, что он получил бы тот же результат и с системой единиц, в которой диэлектрическая постоянная пустого пространства определена как единица.

Рассмотрим полость со стенками, не имеющими никаких специфических свойств и полностью отражающих всякую падающую радиацию. Внутри полости находится разреженный электронный газ. Если газ разрежен достаточно, то мы знаем из рассуждений, аналогичных тем, которые приведены Ричардсоном при рассмотрении термоионной эмиссии, что электроны ведут себя подобно молекулам идеального газа. Эффектом пространственного распределения заряда можно пренебречь в сравнении с силами, определяемыми столкновениями частиц. Пусть электронный газ в полости находится при температуре θ. На электроны действуют силы двух родов: силы столкновения с другими электронами, природа которых такая же, как у атомов в обычной кинетической теории и силы поля радиации в эфире. Электроны постоянно ускоряются, поэтому они непрерывно излучают и поглощают энергию из эфирного поля радиации. Система должна рано или поздно прийти в равновесие, достигая некоторой плотности энергии в эфире, причем электроны должны обладать кинетической энергией, свойственной атомам газа при температуре полости. Подробное решение задачи требует, разумеется, весьма сложного статистического анализа, но и анализ размерностей приводит к некоторым заключениям о форме результата.

Решая эту задачу, мы должны пользоваться уравнениями электродинамики, следовательно, скорость света войдет как размерная постоянная в результат. Нужно учитывать заряд, массу электрона, абсолютную температуру и газовую постоянную, определяющую кинетическую энергию движения электрона как функцию температуры. Число электронов на *куб. см* не войдет, так как мы знаем из кинетической теории, что средняя скорость электронов не зависит от их числа. Второе начало термодинамики также показывает, что плотность энергии в полости есть функция температуры, но не плотности электронного газа.

Таблица 22.

Название величины	*Символ*	*Формула размерности*
Плотность энергии	u	$\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}$
Скорость света	c	$\mathrm{LT^{-1}}$
Масса электрона	m	M
Заряд электрона	e	$\mathrm{M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}}$
Абсолютная температура	θ	θ
Газовая постоянная	k	$\mathrm{ML^{2}T^{-2}}\theta^{-1}$

Применяется обычная электростатическая система единиц. В задаче 6 переменных при 4 основных единицах, поэтому должны существовать два произведения без размерности, если только не имеется специальной связи между показателями. Поскольку нас интересует u, мы выбираем ее как член с показателем, равным единице в произведении. Обычным путем мы находим два произведения

$$ue^6k^{-4}\theta^{-4} \quad \text{и} \quad k\theta m^{-1}c^{-2}.$$

Поэтому результат принимает следующую форму:

$$u = k^4e^{-6}\theta^4 f(k\theta m^{-1}c^{-2}).$$

Мы ничего не знаем о природе функции f. Однако видно, что аргумент функции имеет определенное физическое значение, $k\theta m^{-1}$ составляет половину квадрата скорости электрона, поэтому аргумент в целом составляет квадрат отношения скорости электрона к скорости света. В практической области температур это отношение остается чрезвычайно малым и, следовательно, независимо от формы функции нам известно, что перед нами функция весьма малого аргумента. Распространяя рассуждения, применявшиеся нами относительно числовой величины любых коэффициентов, с которыми можно встретиться при анализе размерностей, можно утверждать с большей вероятностью, что числовое значение нашей функции практически имеет то же значение, как и для нулевой величины аргумента, т. е. что функция может быть заменена некоторой постоянной для всей практической области изменения переменных. Поэтому можно ожидать, что результат будет иметь следующую форму:

$$u = \mathrm{const}\, k^4 e^{-6} \theta^4.$$

θ — единственная физическая переменная правой стороны уравнения, поэтому можно написать:

$$u = a\,\theta^4.$$

Мы, разумеется, узнаем в этой формуле закон Стефана, оправдывающийся на опыте. Поэтому результат до известной степени оправдывает наши упрощения.

Наши соображения о размерах числовых коэффициентов позволяют предположить, что константа в первой форме результата не может быть ни слишком большой, ни слишком малой. Иначе говоря, полагая

$$a = \mathrm{const}\, k^4 e^{-6},$$

можно ожидать известной простоты результата, к которому привели бы конкретные математические операции. Льюис и Адамс обратили внимание на то, что в пределах ошибок опыта постоянная закона Стефана может быть написана в следующей форме:

$$a = \frac{k^4}{(4\pi e)^6}.$$

Хотя $(4\pi e)^6$ далеко не малое число в смысле первоначальной формулировки Эйнштейна о вероятном критерии для числовых коэффициентов, тем не менее его можно считать малым, если учесть значение показателей величин, с которыми он ассоциирован. Нельзя отрицать, что результат обладает большой простотой и поэтому является вероятным, что указанный коэффициент может быть результатом математических операций, а не только случайной комбинацией элементов в формуле, которая правильна только в отношении размерности.

Во всяком случае, каково бы ни было наше мнение о правильности аргументации, удивительный характер результата остается в нашей памяти, и мы воздерживаемся от окончательного суждения до получения полного решения. Точно также периодическая система элементов существовала при известной сдержанности суждения о ней до тех пор, пока не назрело полное решение. Следует упомянуть, что Лоренц и его ученики безуспешно пытались произвести детальный анализ вопроса.

Приведенные соображения дают повод к размышлению. Знаменательно, что квант действия h не фигурирует в результате, хотя, по-видимому, он нераздельно связан с явлениями излучения, по крайней мере в веществе. Мы знаем, что h входит в формулу для спектрального распределения энергии, нам известно также из термодинамических рассуждений, что распределение энергии в спектре в полости, наполненной электронным газом, такое же, как и в черном теле, построенном из атомов. Поэтому в законе распределения энергии в спектре нашей системы должно фигурировать h. Значит ли это, что h может быть выражено через электронные постоянные, газовую постоянную и постоянные эфира, и что для объяснения h не требуется никакого нового механизма, нам до сих пор неизвестного? Разумеется, Льюис приравнял планковское выражение для h написанному выше для получения числового значения h на основании других постоянных[1]. Возьмем еще один пример применения анализа размерностей в теоретических исследованиях. Разберем возможность объяснения механических свойств вещества на основе специальной формы силового закона между атомами.

---

[1] Квантовая теория излучения дает $\dfrac{8\pi^5 k^4}{15c^3h^3}$ (ср. M. Planck. Wärmestrahlung, стр. 183, 1921). Приравнивая это значение выведенному в тексте, т. е. $a = \dfrac{k^4}{(4\pi e)^6}$, находим

$$h = \frac{32}{\sqrt[3]{15}}\pi^{4/3}\frac{e^2}{c}.$$

Иначе говоря, $\dfrac{hc}{e^2}$ оказывается постоянной величиной, не слишком сильно отличающейся от 1 (ср. примечание на стр. 103). За последние годы эта постоянная играла большую роль в спекулятивных построениях А. Эддингтона, причем сделана попытка ее теоретического вывода. Эмпирически $\dfrac{hc}{e^2} = 137.3$, по Эддингтону точно 137. *Прим. ред.*

Можно предположить, что этот закон имеет следующую форму:

$$F = Ar^{-2} + Br^{-n}.$$

A — всегда отрицательно и представляет притягательную силу, B — положительно и соответствует отталкиванию, становящемуся очень значительным при тесном сближении атомов. Атомы различных веществ могут отличаться по массе и по числовому значению коэффициентов A и B, но показатель n пусть будет одним и тем же для всех веществ. Предполагаем также, что температура настолько высока, что квант действия h не имеет существенного значения в распределении энергии по различным степеням свободы, но что для этого достаточно одной газовой постоянной. Внешние переменные, имеющие значение для свойств системы: давление и температура. Если они даны, то определен объем и прочие свойства. Мы получаем поэтому такую таблицу переменных, на основании которых нужно определить любые свойства вещества.

Таблица 23.

Название величины	*Символ*	*Формула размерности*
Давление	p	$\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}$
Температура	θ	θ
Масса атома	m	M
Газовая постоянная	k	$\mathrm{ML^2T^{-2}}\theta^{-1}$
A (из закона силы)	A	$\mathrm{ML^3T^{-2}}$
B «	B	$\mathrm{ML}^{n+1}\mathrm{T}^{-2}$

В добавление к этим величинам мы будем иметь то или иное свойство вещества, подлежащее анализу. В таблице 6 величин при 4 основных единицах. Поэтому из этих переменных можно составить два произведения без размерности. Найдем их. Одно из них выберем содержащим p, но не включающим θ, другое наоборот, так как p и θ являются физическими переменными, находящимися в нашем распоряжении. Легко сразу найти эти произведения:

$$pA^{-(n+2)/(n-2)}B^{4/(n-2)}, \quad A^{-(n-1)/(n-2)}B^{1/(n-2)}k\theta.$$

Эти произведения сразу дают нам сведения о свойствах тел в тех случаях, когда давление и температура не являются независимыми, например, для кривых давления пара, кривых плавления или кривых равновесия между двумя аллотропными модификациями твердого тела. При этих условиях мы имеем:

$$pA^{-(n+2)/(n-2)}B^{4/(n-2)} = f\left(A^{-(n-1)/(n-2)}B^{1/(n-2)}k\theta\right),$$

где f — одна и та же функция для всех веществ, A и B меняются в зависимости от вещества. Наш анализ показывает поэтому, что если ввести новые переменные pC_1 для давления и θC_2 для температуры, то уравнения для кривых равновесия для всех веществ будут одними и теми же. Новые переменные давления и температуры получаются перемножением обычного давления и температуры на постоянные факторы и могут быть названы приввeденными давлением и температурой. Уравнение Ван дер Ваальса является частным случаем такого уравнения, становящегося универсальным в приведенных переменных.

Рассмотрим теперь какое-нибудь иное физическое свойство вещества, которое желательно выразить через наши переменные. Мы должны составить для этого новое произведение без размерности, содержащее рассматриваемую величину. Наиболее удобно выразить это произведение через величины m, k, A и B, так как они физически не изменяются для данного вещества. Выражение любой физической величины с точки зрения размерностей через эти величины всегда возможно, если только детерминант показателей m, k, A и B не равен нулю. Это равенство, как легко видеть, имеет место только в случае $n = +2$, т. е. в тривиальном случае одного только притяжения. Поэтому в общем случае каждое физическое свойство, назовем его Q, может быть выражено в форме:

$$Q = \mathrm{const}\cdot F\Big(pA^{-\frac{n+2}{n-2}}B^{\frac{4}{n-2}},\, A^{-\frac{n-1}{n-2}}B^{\frac{1}{n-2}}k\theta\Big),$$

где const может содержать m, k, A и B, но не включает p и θ. Определим Q/const как «приведенное» значение Q. Тогда мы приходим к важному выводу о том, что для всех веществ этого типа уравнение, связывающее приведенное значение Q с приведенными давлением и температурой, одно и то же. Это применимо не только к термодинамическим свойствам, но и ко всем свойствам, зависящим от той же структуры, например к теплопроводности или вязкости.

Знание множителей, переводящих измеряемые величины физических переменных в «приведенные», позволяет вычислить A, B и m для рассматриваемых веществ, если только n определено из других источников.

Из приведенного анализа видно, что единственное предположение относительно n состояло в том, что n не имеет размерности. Мы не пользовались до сих пор предположением, высказанными вначале, что n одно и то же для всех веществ. От него, следовательно, можно отказаться, и мы приходим к следующей теореме: *для всех веществ, свойства которых определяются атомами с массой m и с законом взаимодействия $Ar^{-2} + Br^{-n}$ для любых значений A, B и n существует закон соответственных состояний для всех физических свойств.*

Разумеется, можно повторить те же рассуждения, заменив внешние переменные p и θ любыми двумя другими, подходящими для нашей цели, например, некоторыми термодинамическими потенциалами. Получится тот же результат, если только нет специальных соотношений между размерными показателями. Наличие или отсутствие таких специальных связей легко определяется в каждом отдельном случае.

Каждому, приступающему к детальному развитию теории структуры вещества такого рода, полезно выполнить предварительное исследование, выяснить, подчиняются ли в действительности свойства вещества закону соответственных состояний и в зависимости от результата предпринимать следующие шаги. Значение такой предварительной разведки бесспорно.

Приведенные рассуждения в некоторых своих частях напоминают анализ Меслэна (5), но они значительно более общи. Меслэн применял свой анализ только к уравнению состояния, предполагая существование критической или других особых точек.

В качестве последнего применения анализа размерностей к теоретической физике рассмотрим определение так называемых абсолютных систем единиц.

Абсолютные размеры обычных единиц фиксированы произвольно, причем могут существовать логические связи между различными видами единиц. Единица длины, сантиметр, была, например, первоначально определена в связи с четвертью длины земного меридиана, а единица массы была выбрана как масса количества воды, занимающей единицу объема. Выбор земли и воды как объектов, фиксирующих размер единицы, конечно, совершенно произволен.

В нашем изложении мы многократно встречались с размерными постоянными. Обычно эти постоянные входят в какой-нибудь фактор пропорциональности в выражении эмпирически открытого закона природы. Такими постоянными являются: постоянная тяготения, скорость света, квант действия, постоянная закона Стефана и т. д. Числовая величина размерных постоянных зависит от величины основных единиц, причем вид этой зависимости выражается формулами размерности. Меняя величину основных единиц, мы можем изменять как угодно числовую величину размерных постоянных. В частности, приписывая основным единицам подходящие величины, мы можем приравнять числовые значения некоторых размерных постоянных единице. Но размерные постоянные обыкновенно являются выражением некоторого *универсального* закона природы. Если основные единицы выбраны так, что размерные постоянные равны единице, то тем самым мы определяем размер единиц по отношению к универсальным явлениям вместо того, чтобы связывать их с такими случайными явлениями, как, например, плотность воды при атмосферном давлении и определенной температуре. Вследствие этого наши единицы становятся более значительными.

Всякая система единиц, определенная таким способом относительно явлений универсальной распространенности и значения, может быть названа абсолютной системой единиц. Первая такая система дана Планком (6) в его книге о тепловом излучении. Он связал свою систему с квантом действия, и по изложению Планка может показаться, что до открытия кванта не было известно достаточного числа размерных постоянных подходящего характера, чтобы построить универсальную систему единиц. Это не так. Планку принадлежит первая идея о возможности абсолютных единиц, и он применил квант действия для их определения, однако никакой необходимости оперировать именно с квантом нет, как будет видно из дальнейшего изложения.

Определим по формулам размерности группу абсолютных единиц, данных Планком. Для фиксации единиц мы выбираем постоянную тяготения, скорость света, квант действия и газовую постоянную. Мы требуем, чтобы основные единицы обладали такими размерами, чтобы эти универсальные постоянные все имели значение 1 в новой системе. Задачу можно упростить для нашего изложения, опустив газовую постоянную, потому что только в нее входит единица температуры. Ясно, однако, что после определения единиц массы, длины и времени можно сделать газовую постоянную равной единице соответствующим выбором величины градуса. При определении величины новых единиц мы полагаем удобным пользоваться приемами главы 3, применявшимися при изменении единиц.

Напишем: постоянная тяготения $G = 6,658 \cdot 10^{-8} г^{-1} см^3 сек.^{-2}$ Числовое значение в новой системе единиц найдется подстановкой в формулу для G выражений новых единиц через старые. Если новая единица массы такова, что она равна xz, новая единица длины равна y *см*, а новая единица времени равна z сек., то мы получим уравнение для определения x, y и z, в котором числовое значение постоянной тяготения приравнено единице в новой системе:

$$6,658 \cdot 10^{-8} г^{-1}\ см^3\ \text{сек.}^{-2} = 1(x\ г)^{-1}(y\ см)^3(z\ \text{сек.})^{-2}.$$

Две другие размерные постоянные дадут два добавочных уравнения, требуемых для определения x, y и z. Зная числовые значения и формулы размерностей скорости света и кванта действия, сразу напишем:

$$3 \cdot 10^{10} см\ \text{сек.}^{-1} = 1(y\ см)(z\ \text{сек.})^{-1},$$

$$6,55 \cdot 10^{-27}\ г\ см^2\ \text{сек.}^{-1} = 1(x\ г)(y\ см)^2(z\ \text{сек.})^{-1}.$$

Эта система трех уравнений легко разрешается, и мы имеем:

$$x = 5,43 \cdot 10^{-5}; \quad y = 4,02 \cdot 10^{-33}; \quad z = 1,34 \cdot 10^{-43}.$$

Это значит, что:

новая	единица	массы	равна	$5,43 \cdot 10^{-5}$ *г*,
»	»	длины	»	$4,02 \cdot 10^{-33}$ *см*,
»	»	времени	»	$1,34 \cdot 10^{-43}$ сек.

До сих пор мы двигались вперед, все ясно и не возникает никаких вопросов. Однако иногда делаются попытки идти дальше в поисках некоторого абсолютного значения у полученных цифр; на них смотрят как на характеристику самого механизма, связанного с универсальными постоянными. Эддингтон (7), например, пишет: «Существуют три постоянных природы, занимающих доминирующее положение: скорость света, постоянная тяготения и квант действия. На их основе можно построить единицу длины, равную $4 \cdot 10^{-33}$ *см*. Существуют и другие естественные единицы длины, радиусы положительных и отрицательных зарядов, но их размеры совершенно другого, высшего порядка величины. За возможным исключением теории материи Осборна Рейнольдса ни одна теория не пыталась дойти до столь тонкого дробления. Но очевидно, что эта длина должна служить ключом к некоторой, весьма существенной структуре».

Спекуляции такого рода не могут возбудить симпатии в тех, кто разделяет несколько материалистическую точку зрения моего изложения. Единственным фактом некоторого значения во всем этом является только то, что размерные формулы трех постоянных позволили определить новые единицы, вместе с тем значение этого факта не может быть большим, потому что есть шансы при любой комбинации трех размерных постоянных, избранных наудачу, достигнуть того же самого. До тех пор, пока не будет раскрыта внутренняя связь между механизмами, определяющими постоянную тяготения, скорость света и кванта действия, размеры единиц, найденных указанным способом, едва ли могут иметь какое-либо иное значение помимо связи этих единиц с универсальными явлениями.

Продолжим теперь вывод абсолютных единиц и перейдем к газовой постоянной. Для нее мы имеем уравнение:

$$\text{Газовая постоянная}^1\ k = 2,06 \cdot 10^{-16}\ \textit{г см}^2\ \text{сек.}^{-2}\ \theta^{-1} = \\ = 1\ (x\ \textit{г})(y\ \textit{см})^2(z\ \text{сек.})^{-2}(w\theta)^{-1};$$

x, y, z уже определены, и, следовательно, из уравнения сразу находится w. Получаем $2,37 \cdot 10^{32}$, это значит, что новый градус должен равняться $2,37 \cdot 10^{32}$ обычных градусов Цельсия.

Даже в самых фантастических спекуляциях астрофизики никто никогда не говорил о таких температурах, и будет ли профессор Эддингтон утверждать, что эта температура должна быть ключом к каким-то основным космическим явлениям?

Теперь должна стать очевидной возможность получения систем абсолютных единиц разнообразными путями в зависимости от универсальных постоянных или явлений, численное значение которых желательно упростить. При любом выборе постоянных метод в общем будет тем же самым, как и в разобранном случае. Вообще говоря, должны быть четыре основных единицы, если только мы удовлетворяемся электростатической системой измерения зарядов и определяем величину заряда тем, что сила между двумя зарядами равна их произведению,

[1]Газовая постоянная, применяемая здесь, отличается от принятой на множитель $\frac{3}{2}$, т. е. соответствует трем степеням свободы. *Прим. ред.*

деленному на квадрат расстояния между ними. Если мы не желаем ограничиваться электростатической системой, то могут существовать пять видов основных единиц. Ничего существенного в этом числе 5 нет, оно возникает только потому, что обычно мы применяем механическую систему единиц, в которой фактор пропорциональности между силой и произведением массы на ускорение всегда приравнивается единице. Удобство такой системы в случае механических явлений очевидно, благодаря их универсальной распространенности. Но если бы температурные эффекты были бы столь же распространены и привычны, то мы с равным правом могли бы настаивать на системе единиц, в которой газовая постоянная имеет значение единицы.

Договорившись таким образом о наиболее удобном числе основных единиц и выбрав те числовые постоянные, значения которых желательно упростить, мы поступаем как и раньше.

Очевидно, что нам нужно выбрать столько же постоянных, сколько имеется основных единиц, иначе не хватит уравнений для определения неизвестных. Так, например, в только что разобранном случае мы фиксировали 4 константы: гравитационную, постоянную, скорость света, квант действия и газовую постоянную; в соответствии с этим у нас было 4 основных единицы. Существенно помнить однако, что не всякие 4 алгебраических уравнения с 4 неизвестными имеют решение, для этого их коэффициенты должны удовлетворять некоторому условию. В применении к формулам размерности, в которые входят неизвестные, это условие сводится к тому, что детерминант показателей не должен равняться нулю. Вообще говоря, нельзя ожидать, что случайно взятый четырехстрочный детерминант будет равняться нулю. В случае детерминантов, составленных из показателей формул размерностей постоянных природы, это, однако, не так. Соответствующие формулы размерности почти всегда очень просты, и показатели почти всегда малые целые числа. При таких условиях равенство нулю детерминанта показателей — явление обычное, и часто предложенная схема определения абсолютных единиц оказывается невозможной. Исчезновение детерминанта указывает, что все величины не являются размерно независимыми, т. е. вместо четырех независимых величин, при помощи которых надо определить неизвестные, мы имеем меньшее число. Например, мы нашли, что постоянная тяготения имеет формулу размерности, совпадающую с размерностью квадрата отношения заряда к массе электрона. Это значит, что мы не можем построить систему абсолютных единиц, в которой приравнены единице постоянная тяготения, заряд и масса электрона.

Выпишем таблицу некоторых важных постоянных природы и посмотрим, какие имеются возможности в отношении определения систем абсолютных единиц.

Таблица 24.

Название постоянной	*Символ*	*Числовая величина в см г сек.*
Постоянная тяготения	G	$6,658 \cdot 10^{-8}$ *г*$^{-1}$ *см*^{3} сек.$^{-2}$
Скорость света	c	$3 \cdot 10^{10}$ *см* сек.$^{-1}$
Квант действия	h	$6,547 \cdot 10^{-27}$ *г см*^{2} сек.$^{-1}$
Газовая постоянная[1]	k	$2,058 \cdot 10^{-16}$ *г см*^{2} сек.$^{-2}$ °C^{-1}
Постоянная Стефана	a	$7,60 \cdot 10^{-15}$ *г см*$^{-1}$ сек.$^{-2}$ °C^{-4}
Первая спектральная постоянная	C	$0,353$ *г см*^{4} сек.$^{-3}$
Вторая спектральная постоянная	a'	$1,431$ *см* °C
Постоянная Ридберга	R	$3,290 \cdot 10^{15}$ сек.$^{-1}$
Заряд электрона	e	$4,774 \cdot 10^{-10}$ *г*$^{1/2}$ *см*$^{3/2}$ сек.$^{-1}$
Масса электрона	m	$8,8 \cdot 10^{-28}$ *г*
Число Авогадро	N	$6,06 \cdot 10^{23}$ *г*$^{-1}$
Второе число Авогадро	N'	$7,29 \cdot 10^{15}$ *г*$^{-1}$ *см*$^{-2}$ сек.^{2} °C

Некоторые из приведенных величин нужно пояснить. Постоянная Стефана a определяется соотношением $u = a\theta^4$, где u есть плотность энергии в полости при равновесии со стенками при температуре θ. «Первая» и «вторая» спектральные постоянные суть константы формулы

$$E_\lambda = \frac{C}{\lambda^5}\left[e^{a'/(\lambda\theta)} - 1\right]$$

для распределения энергии в спектре черного тела. Число Авогадро N определяется как число молекул на 1 грамм-молекулу вещества и его размерность получается из формулы:

$$N = (\text{число молекул на } г) \times \frac{\text{масса молекулы}}{\text{масса атома водорода}}.$$

[1] Постоянная, приводимая Бриджменом, отличается от принятой постоянной Больтцмана на множитель $\frac{3}{2}$, т. е. соответствует трем степеням свободы. *Прим. ред.*

Размерность будет, очевидно, равна обратной массе, а числовое значение равно обратной массе молекул водорода.

Второе число Авогадро N' определяется как число молекул на куб. см в идеальном газе при температуре и давлении равных 1. Мы знаем, что это число не зависит от природы газа и поэтому может считаться универсальной постоянной. Размерность N', очевидно, будет *объем* $^{-1}$, *давление* $^{-1}$, *температура,* числовое же значение сразу находится из N.

Перед нами таблица из двенадцати размерных постоянных, на основе которых желательно определить абсолютную систему единиц. Постоянные определены через 4 основные единицы, поэтому, вообще говоря, достаточно четырех любых констант из двенадцати для определения абсолютной системы. Однако показатели настолько просты, что в действительности во многих случаях детерминант показателей равен нулю, и данное сочетание констант оказывается непригодным. Так, например, C с точки зрения размерности определяется той же формулой, как и hc^2, поэтому непригодна ни одна комбинация, в которую одновременно входят C, h и c. Постоянная k имеет такую же размерность, как cha'^{-1}, и, следовательно, сочетание k, c, h и a' тоже не годится. N' и k^{-1} разноразмерны, следовательно, исключаются все комбинации, в которые входят k и N'. Этими примерами число непригодных случаев не ограничивается. Мораль заключается в том, что не следует пытаться строить абсолютную систему единиц на основе какой-либо комбинации постоянных, не убедившись сначала в возможности этого. Невозможными могут оказаться сочетания, кажущиеся на первый взгляд особенно подходящими. Нельзя, например, одновременно приравнять единице скорость света, квант действия, заряд электрона и газовую постоянную.

В утешение приведем некоторые возможные сочетания. Оказывается, что детерминанты следующих комбинаций не равны 0:

$$\begin{cases} G, c, h, k \\ G, c, e, k \\ N, c, h, k \\ N, c, e, k \end{cases}$$

Если у кого-нибудь появится предубеждение по отношению к некоторым из наших 12 постоянных, и они будут исключены, то могут получиться неожиданные результаты. Предположим, что мы отказываемся рассматривать постоянные R, m, N и N'. Остаются G, c, h, k, a, C, a', e. Оказывается, что из семи последних, написанных в этой строке, невозможно построить ни одной комбинации, для которой детерминант показателей не равнялся бы нулю. Следовательно, любое пригодное сочетание из указанных восьми должно включать гравитационную постоянную. Этим фактом объясняется возможность «Принципа подобия» Тольмана (8). Мне кажется, нельзя приписывать какое-либо значение существованию таких соотношений между различными размерными постоянными. Этот факт должен рассматриваться как чистая случайность, объясняемая ограниченным числом элементов, которые входят в состав формул размерности и их относительной простотой.

Другая интересная спекуляция, касающаяся природы абсолютных единиц, требует комментариев; Г. Н. Льюис (4) утверждает, что по его убеждению любое сочетание абсолютных единиц должно находиться в простом числовом отношении ко всякому другому возможному сочетанию абсолютных единиц. Эта точка зрения в настоящее время не имеет какого-либо оправдания на основе точных результатов измерений и по своему характеру является почти мистической. Указанное предположение привело Льюиса к обнаружению замечательно простого соотношения между постоянной Стефана, электронным зарядом и газовой постоянной, но, насколько мне известно, эта точка зрения оказалась бесплодной в других направлениях, и я уже указывал иное возможное значение простоты найденного соотношения.

Разберем эту гипотезу Льюиса на числовом примере. Мы уже определили величину основных единиц, получаемых на основе постоянной тяготения, скорости света, кванта действия и газовой постоянной. Найдем теперь, какие единицы получатся на основе q, c, k и e? Задача во всех деталях такая же, как и прежде, и нет необходимости снова выписывать уравнения.

Мы находим следующие единицы:

новая	единица	массы	$1,849 \cdot 10^{-6}$ *г*,
»	»	длины	$1,368 \cdot 10^{-34}$ *см*,
»	»	времени	$4,56 \cdot 10^{-45}$ сек.,
»	»	температуры	$8,07 \cdot 10^{30}$ °C.

Отношение всех этих единиц к ранее определенным оказывается равным $\frac{1}{29,36}$. Само по себе число 29,36 не может казаться очень простым, но проследив путь его появления в формулах, можем найти, что приближенно

$$29,36 = 4\pi\left(\frac{8\pi^5}{15}\right)^{3/2}.$$

Это несколько сложное числовое выражение получается из планковского соотношения между постоянной Стефана и спектральными константами излучения. Действительно, применяя формулу Льюиса для a, получаем[1]:

$$h = (4\pi)^2\left(\frac{8\pi^5}{15}\right)^{3/2}\frac{e^2}{c}.$$

Мне думается, что только с большим сомнением можно назвать этот числовой коэффициент «простым».

Если это «просто», то трудно понять, каков же критерий простоты и принцип Льюиса даже в качестве эвристического, приобретает весьма сомнительную ценность. Сам Льюис (9) не считает приведенный коэффициент простым и видит в этом обстоятельстве возможное указание на только приближенную правильность формулы Планка; когда-нибудь станет возможной более строгая теория, в которой число, приравниваемое теперь, в пределах ошибок опыта, 29,36, окажется построенным из простого сочетания π и простых целых чисел.

Таким образом, оправдание приведенной спекуляции откладывается на будущее. Характер таких спекуляций, очевидно, противоречит характеру нашего изложения, и мы продолжаем твердо стоять на своей точке зрения, с которой не усматривается что-либо мистическое, или загадочное в анализе размерностей (10).

Литература

[1] A. Einstein. Ann. d. Phys. **35**, 686, 1911.

[2] J. H. Jeans. Trans. Roy. Soc. **201** (A), 157, 1903.

[3] J. H. Jeans. Proc. Roy. Soc. **76**, 545, 1905.

[4] G. N. Lewis and E. Q. Adams. Phys. Rev. **3**, 92, 1914.

[5] C. R. Meslin. **116**, 135, 1893.

[6] M. Plank. Wärmestrahlung.

[1] Ср. примечание на стр. 108. *Прим. ред.*

[7] A. S. Eddington. Report on Gravitation, Lond. Phys. Soc., стр. 91, 1918.

[8] R. C. Tolman. Phys. Rev. **3**, 244, 1914. Принцип подобия дискутируется в след. статьях: P. W. Bridgman. Phys. Rev. **8**, 423, 1916. J. Wallot. ZS. f. Phys. **10**, 329, 1922. F. London Phys. ZS, **23**, 262, 289, 1922. Т. А. Афанасьева–Эренфест. Журн. Русск. Физ.-Хим. О-ва. Вып. 7, 1911.

[9] Частное сообщение Льюиса.

[10] Вопрос дискутируется в следующих статьях: N. Campbell. Phil. Mag. **47**, 159, 1924, G. N. Lewis. Phil. Mag. **49**, 739, 1925, O. J. Lodge Phil. Mag. **49**, 751, 1925.

Добавление редактора к главе 8

Системы абсолютных единиц для атомной физики

Можно построить большое число естественных абсолютных систем единиц (ср. текст). Принципиальные преимущества одной такой системы перед другой до сего времени не ясны. При таком положении дела преимущества, очевидно, должны иметь системы, представляющие практические выгоды. Система Планка одинаково неудобна как для области атомной физики, так и для круга молярных явлений. Единица длины Планка примерно в 10^{20} раз меньше размеров самых малых объектов известных до сих пор (атомных ядер и электронов); единица времени практически несоизмерима с самыми ничтожными периодами, с которыми приходится иметь дело, достаточно сказать, что период видимых световых колебаний выразился бы в единицах Планка величиной порядка 10^{29}. Единица массы у Планка могла бы быть реализована водяной капелькой с радиусом около 0,15 *мм*, бесполезной в качестве эталона в любой области знания.

Недавно Руарк (A. E. Ruark. Phys. Rev. **38**, 2240, 1931) предложил две естественные абсолютные системы единиц, представляющие, несомненно, ряд преимуществ по крайней мере для атомной физики. В первой системе (A) единице приравниваются скорость света c, радиус первой орбиты атома водорода (с пренебрегаемым движением ядра) равный $\dfrac{h^2}{4\pi^2 me^2}$ и масса электрона m. Во второй системе (B) за единицу длины избрано комптоновское изменение длины волны при рассеянии света электроном на угол 90°, деленное на 2π, т. е. $\frac{h}{2\pi mc}$; точно так же, как и в системе (А), c и m приравнены единице. В результате получаются такие значения для новых единиц.

Название величины	*Система A*	*Система B*	*Система Планка*
Длина	$5 \cdot 10^{-9}$	$3,9 \cdot 10^{-11}$	$4 \cdot 10^{-33}$
Время	$1,7 \cdot 10^{-19}$	$1,3 \cdot 10^{-21}$	$1,3 \cdot 10^{-43}$
Масса	$3 \cdot 10^{-28}$	$9 \cdot 10^{-28}$	$5,4 \cdot 10^{-5}$

Легко видеть, что единицы системы А особенно удобны для характеристики периферической структуры атомов и молекул и спектров оптических областей. Система В более удобна для ядерных явлений, внутренних электродов и жестких радиаций. Эти системы действительно упрощают символику теоретических уравнений и расчеты. Например, в системе В экспоненциальный фактор в волновой функции упрощается, вместо $e^{-2\pi i Et/h}$ следует писать e^{-iEt}.

Уравнение Шредингера

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - v)\psi = 0$$

в системе В принимает вид

$$\Delta\psi + 2(E - v)\psi = 0.$$

Тот же вид уравнение Шредингера принимает в получившей известность системе Хартри (Proc. Cambr. Phil. Soc. **24**, 89, 1928), где положены единице заряд электрона, его масса и радиус боровской орбиты.

Преимущества систем Руарка и Хартри очевидны, при чем из этого примера ясно, что комбинированием тех или иных постоянных можно строить естественные абсолютные системы, специально приспособленные для явлений данного масштаба. Несомненно, известное практическое значение могла бы иметь целая система естественных абсолютных систем единиц, последовательно охватывающая процессы разных масштабов. Для этого могут понадобиться новые универсальные постоянные, но они, по-видимому, есть не только в области микромира, но и в астрономических областях (постоянная красного смещения спиральных туманностей). Единая абсолютная естественная система всегда окажется тут или там неудобной.

Задачи

1. Газовая постоянная в уравнении $pv = RT$ имеет величину 0,08207, давление p выражено в атмосферах, объем v в метрах, занимаемых 1 грамм-молекулой, и T в абсолютных градусах. Каково будет значение R, если p выражено в динах на $см^2$, а v в $см^3$?

2. Теплопроводность меди равна 0,92 *кал* через $см^2$ в сек. при температурном градиенте 1° на *см*. Какова будет теплопроводность в B. T. I. (британская тепловая единица)[1] через квадратный фут в час при температурном градиенте в 1° Фаренгейта на фут (английская техническая единица)?

3. Если численное значение $\dfrac{e^2}{ch}$ равно 0,001161 в *см г* сек., какое значение будет иметь это выражение в тоннах, милях и часах? e — заряд электрона в э. с. единицах, c — скорость света в пустом пространстве, h — квант действия.

4. Напор, производимый воздушным пропеллером, изменяется в зависимости от числа оборотов в секунду и от скорости перемещения вдоль оси вращения. Показать, что критическая скорость перемещения, при которой напор исчезает, пропорциональна числу оборотов в секунду.

5. Показать, что ускорение к центру, испытываемое частицей, равномерно вращающейся по кругу радиуса r, равно $\mathrm{const}\,\dfrac{v^2}{r}$.

6. Показать, что период поперечных колебаний тяжелой натянутой проволоки равен $\mathrm{const} \times \text{длина} \times \left(\dfrac{\text{линейная плотность}}{\text{натяжение}}\right)$.

7. Показать, что период продольных колебаний балки равен

$$\mathrm{const} \times \text{длина} \times \left(\frac{\text{объемная плотность}}{\text{упругая постоянная}}\right)^{1/2}.$$

8. Показать, что скорость звука равна

$$\mathrm{const} \times \left(\frac{\text{плотность}}{\text{модуль сжимаемости}}\right).$$

9. Закручивание цилиндра на единицу длины изменяется обратно пропорционально упругой постоянной или прямо пропорционально моменту приложенной силы. Доказать на этом основании, что закручивание изменяется обратно пропорционально четвертой степени диаметра.

10. Существует некоторая критическая скорость вращения, при которой масса несжимаемой тяжелой жидкости становится неустойчивой. Доказать, что угловая скорость при неустойчивости не зависит от диаметра и пропорциональна квадратному корню из плотности.

---

[1] Британская тепловая единица (при 60°) равна 1054,6 джоулей или $1054{,}6 \cdot 10^7$ эргов. *Прим. ред.*

11. Существует некоторый размер, при котором твердый не вращающийся шар становится неустойчивым под действием собственного тяготения. Доказать, что радиус неустойчивого шара изменяется прямо пропорционально квадратному корню из отношения упругой постоянной к плотности.

12. Скорость распространения волн в мелкой воде не зависит от длины волны. Доказать на этом основании, что она изменяется пропорционально корню квадратному из глубины.

13. Доказать, что скорость капиллярных волн пропорциональна корню квадратному из отношения поверхностного натяжения к длине волны, умноженной на плотность.

14. Масса, привязанная к невесомой струне, испытывает тормозящую силу, пропорциональную ее скорости, в то же время на массу действует периодическая сила. Показать, что в установившемся состоянии амплитуда колебаний пропорциональна силе.

15. Время соприкосновения двух равных шаров при ударе пропорционально их радиусу. Далее дано, что это время обратно пропорционально корню пятой степени из относительной скорости сближения шаров. Показать, что время соприкосновения пропорционально

$$\left(\frac{\text{плотность}}{\text{упругая постоянная}}\right)^{2/5}.$$

16. Доказать, что удельная теплота идеального газа, атомы которого характеризуются только массой, не зависит от давления и температуры.

17. Показать, что если газ рассматривается как совокупность молекул конечных размеров, не проявляющих взаимных сил помимо моментов соприкосновения, то вязкость будет независимой от давления и пропорциональной квадратному корню из абсолютной температуры.

18. Показать, что если теплопроводность газа задачи 17 не зависит от давления, то она также пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры.

19. На твердое тело, бесконечно простирающееся в одну сторону, накладывается периодически изменяющаяся температура. Показать, что скорость распространения возмущения в твердом теле пропорциональна корню квадратному из частоты, а длина волны обратно пропорциональна корню квадратному из частоты. Возмущение падает до $1/e$ (e — основание натуральных логарифмов) части своего начального значения на расстоянии в такое число волн, которое не зависит от частоты и термических постоянных материала.

20. Длинная тонкая проволока погружена в среду, которая поддерживает внешнюю поверхность проволоки при постоянной температуре. Нагревание проволоки производится переменным током телефонной частоты, при чем подводимое количество тепла изменяется по закону $Q \cos \omega t$ на единицу объ-

ема. Показать, что амплитуда периодических колебаний средней температуры проволоки изменяется по закону, имеющему вид:

$$\theta = Q\frac{d^2}{k} f\left(\omega c \frac{d^2}{k}\right),$$

где d — диаметр проволоки, k — коэффициент теплопроводности и c — теплоемкость на единицу объема. Показать, предполагая проволоку тонкой, на основании численных значений k и c для металлов, что θ не зависит от ω и c и принимает следующее значение:

$$\theta = \mathrm{const}\, Q\, \frac{d^2}{k}.$$

21. Внутренняя энергия определенного количества идеального газа, отсчитываемая от абсолютного нуля и давления 0, независима от давления и пропорциональна абсолютной температуре. Показать, что внутренняя энергия, отсчитываемая от любого начального состояния (произвольная температура и давление) не зависит от давления и пропорциональна избытку абсолютной температуры над начальной точкой.

22. Почему вывод задачи 21 нельзя приложить к энтропии определенного количества идеального газа?

23. Ричардс (Journ. Amer. Chem. Soc. **37**, 1915) эмпирически нашел следующее соотношение для различных химических элементов:

$$\beta = 0{,}00021\frac{A}{D^{1,25}}(T_m - 50^\circ),$$

где $\beta = \dfrac{1}{v}\left(\dfrac{\partial v}{\partial p}\right)_T$ есть сжимаемость, A — атомный вес, D — плотность, T_m — температура плавления по абсолютной шкале. Какое минимальное количество размерных постоянных требуется для «полноты» этого уравнения, и каковы их размерности?

24. Доказать, что сила магнитного поля вокруг магнитного диполя пропорциональна моменту диполя и обратно пропорциональна кубу расстояния.

25. Какова размерность диэлектрической постоянной в пустом пространстве в электромагнитной системе единиц? Каково ее численное значение?

26. Какова размерность магнитной проницаемости в пустом пространстве в электростатической системе единиц? Каково ее численное значение?

27. На плоской поверхности «полубесконечного» проводника индуцируется переменный ток. Показать, что скорость распространения возмущения в среду пропорциональна квадратному корню из удельного сопротивления, деленного на период, а расстояние, на котором амплитуда уменьшается в e

(основание натуральных логарифмов) раз пропорционально квадратному корню из произведения удельного сопротивления на период.

28. Показать, что самоиндукция линейной цепи пропорциональна линейным размерам.

29. Синусоидальная э.д.с. приложена к одному концу электрической линии с распределенным сопротивлением, емкостью и самоиндукцией. Показать, что скорость распространения возмущения обратно пропорциональна, а постоянная затухания прямо пропорциональна квадратному корню из емкости на единицу длины.

30. Электрон, движущийся со скоростью v, попадает в магнитное поле, направленное под прямым углом к скорости. Зная, что радиус кривизны орбиты электрона прямо пропорционален его скорости, показать, что он одновременно пропорционален массе электрона и обратно пропорционален полю и заряду.

31. В электродинамических задачах, в решение которых входит скорость света, единица времени может быть определена так, чтобы скорость света равнялась 1, и достаточными оказываются две основные единицы, массы и длины. Напишите размерности различных электрических и магнитных величин в этих единицах. Получите формулу для массы электрона через его массу и радиус. Задачи, включающие постоянную тяготения, могут быть точно так же решены только при помощи единиц массы и длины в качестве основных. Разберите формулу для массы электрона с гравитационными единицами.

32. Постоянная Ридберга, имеющая размерность частоты по теории Бора, для атома водорода имеет вид:

$$R = \frac{me^4}{h^3}.$$

Доказать это, имея в виду, что e, m — заряд и масса электрона, h — постоянная Планка.

Размерности некоторых величин в обычной системе единиц

Механические величины

Величина	*Формула размерности*
Угол	0
Площадь	L^2
Объем	L^3
Кривизна	L^{-1}
Частота	T^{-1}
Скорость	LT^{-1}
Ускорение	LT^{-2}
Угловая скорость	T^{-1}
Угловое ускорение	T^{-2}
Плотность	ML^{-3}
Момент (количество движения)	MLT^{-1}
Момент количества движения	ML^2T^{-1}
Угловой момент	ML^2T^{-1}
Сила	MLT^{-2}
Момент пара	ML^2T^{-2}
Работа, энергия	ML^2T^{-2}
Мощность	ML^2T^{-3}
Действие	ML^2T^{-1}
Натяжение, давление	$ML^{-1}T^{-2}$
Усилие (Strain)	0
Модель упругости	$ML^{-1}T^{-2}$
Константа упругости	$M^{-1}LT^2$
Вязкость	$ML^{-1}T^{-1}$
Кинематическая вязкость	L^2T^{-1}
Капиллярная постоянная	MT^{-2}

Тепловые величины

Величина	*Размерность* Тепловые единицы	*Размерность* Динамические единицы
Температура	θ	θ
Количество тепла	H	ML^2T^{-2}
Теплоемкость на единицу объема	$HM^0L^{-3}T^0\theta^{-1}$	$ML^{-1}T^{-2}\theta^{-1}$
Теплоемкость на единицу массы	$HM^{-1}L^0T^0\theta^{-1}$	$M^0L^2T^{-2}\theta^{-1}$
Градиент температуры	$H^0M^0L^{-1}T^0\theta$	$M^0L^{-1}T^0\theta$
Теплопроводность	$HM^0L^{-1}T^{-1}\theta^{-1}$	$MLT^{-3}\theta^{-1}$
Энтропия	$HM^{-0}L^0T^0\theta^{-1}$	$ML^2T^{-2}\theta^{-1}$

Электрические величины

Величина	*Размерность* Электростатическая система	*Размерность* Электромагнитная система
Количество электричества	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$	$M^{1/2}L^{1/2}T^0$
Объемная плотность	$M^{1/2}L^{-3/2}T^{-1}$	$M^{1/2}L^{-5/3}T^0$
Поверхностная плотность	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}$	$M^{1/2}L^{-3/2}T^0$
Сила электрического поля	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}$	$M^{1/2}L^{1/2}T^{-2}$
Разность потенциалов	$M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}$	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-2}$
Диэлектрическая постоянная	$M^0L^0T^0$	$M^0L^{-2}T^2$
Электрическое смещение	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}$	$M^{1/2}L^{-3/2}T^0$
Емкость	M^0LT^0	$M^0L^{-1}T^{-2}$
Ток	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-2}$	$M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}$
Плотность тока	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-2}$	$M^{1/2}L^{-3/2}T^{-1}$
Сопротивление	$M^0L^{-1}T$	M^0LT^{-1}
Проводимость	$M^0L^0T^{-1}$	$M^0L^{-2}T$
Сила магнитного полюса	$M^{1/2}L^{1/2}T^0$	$M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}$
Магнитный момент	$M^{1/2}L^{3/2}T^0$	$M^{1/2}L^{5/2}T^{-1}$
Сила магнитного поля	$M^{1/2}L^{1/2}T^{-2}$	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}$
Магнитная проницаемость	$M^0L^{-2}T^2$	$M^0L^0T^0$
Магнитная индукция	$M^{1/2}L^{-2/3}T^0$	$M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}$
Само- или взаимоиндукция	$M^0L^{-1}T^2$	M^0LT^0

Общий обзор некоторых результатов в области физики высоких давлений[1]

Нобелевская лекция, 11 *декабря* 1946 *года*

В этой лекции я постараюсь сделать общий обзор тех областей физики высоких давлений, которыми я непосредственно занимался. В первую очередь будут рассматриваться технические вопросы создания и измерения высокого давления, а затем — физические явления, имеющие место при таких давлениях.

Что касается технологии, то здесь нужно выделять несколько диапазонов давления. На первом этапе нужно было разработать уплотнение, исключающее утечку, поскольку именно она ограничивала диапазон в предшествующих экспериментах. Из рис. 1 видно, что было сконструировано уплотнение, которое автоматически становится плотнее при увеличении давления. Таким образом, стало возможно создавать давления, величина которых ограничивается лишь прочностью используемых сосудов. Если сосуды представляют цельную конструкцию из лучших термообработанных легированных сталей, то в общем случае можно достигать давления в 12 000 $кг/см^2$, а на короткие интервалы времени — до 20 000 $кг/см^2$. В течение нескольких лет мои исследования были связаны именно такими величинами давления и в этих условиях оказалось возможным измерить почти все обычные физические свойства веществ. Следующим шагом являлось обеспечение сосудов высокого давления внешними креплениями, действие которых возрастали бы при увеличении внутреннего давления. Наиболее простым образом это можно осуществить с помощью создания сосуда высокого давления конической формы и вдавливание этого в массивную шайбу с силой, пропорциональной внутреннему давлению, как это изображено на рис. 2. На устройствах такого типа можно проводить эксперименты со стандартным давлением до 30 000 $кг/см^2$ при объемах порядка 15 $см^3$; также к аппарату можно подвести электрически изолированные контакты и повторить все предшествующие экс-

[1] Перевод с английского И. Д. Пасынкова.

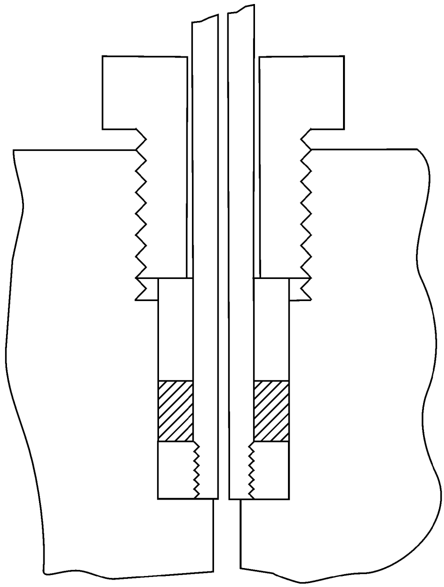

Рис. 1. Общая схема уплотнения, где давление в мягких прокладочных материалах автоматически поддерживается на фиксированное число процентов выше, чем в жидкости

перименты из диапазона до 12 000 *кг/см*^{2}. На данный момент я еще не закончил эту программу экспериментов. Такую же методику можно перенести на меньшие объемы (до 0,5 *см*^{3}) и получить давления до 50 000 *кг/см*^{2}. В этом диапазоне все обычные жидкости превращаются в твердые тела, к которым уже нельзя подвести электрически изолированные контакты. Поэтому все явления, которые можно изучить, ограничены различными объемными эффектами, такими как сжимаемость и смена фаз, а также плавление и полиморфные переходы.

Внешнее воздействие на сосуд является лишь одним из факторов, которые позволяют расширить диапазон давлений с 12 000 до 50 000 *кг/см*^{2}. Никакой стальной поршень не выдержит такого усилия; однако карболой — недавно открытое вещество, используемое в производстве инструментов, — который получают путем спекания мелкого порошка карбида вольфрама с кобальтом, обладает достаточно высокой прочностью на сжатие.

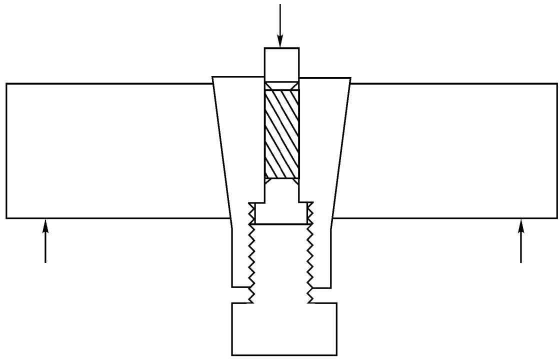

Рис. 2. Иллюстрация общего принципа внешнего крепления сосуда высокого давления, сила которого возрастает с увеличением внутреннего давления

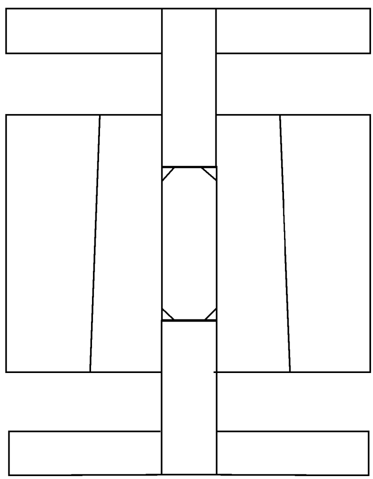

Рис. 3. Миниатюрное устройство для получения давления в 100 000 *кг/см*^{2}

Для следующего шага по расширению диапазона давлений с 50 000 до 100 000 *кг/см*^{2} нужна еще более эффективно действующее крепление для сосуда. Это требование удовлетворяется за счет погружения всего сосуда целиком в жидкость под давлением до 30 000 *кг/см*^{2}. Устройство

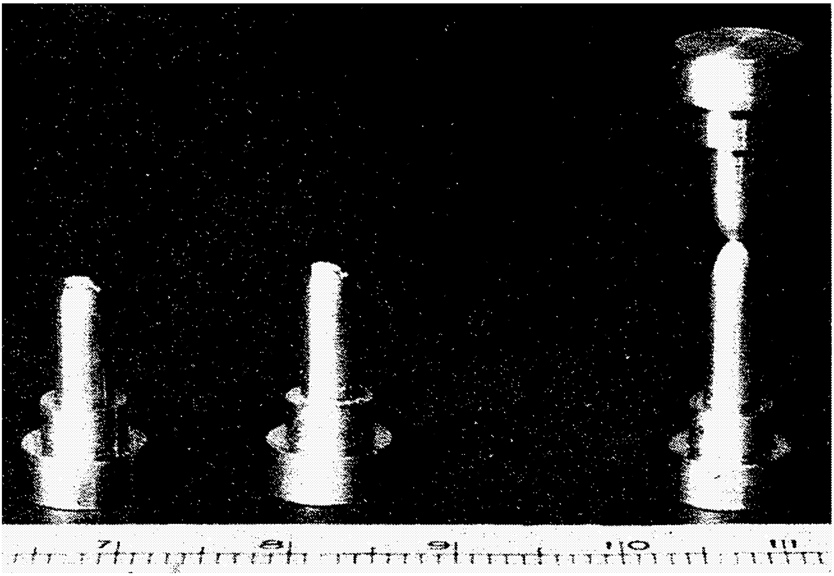

Рис. 4. Наглядный пример влияния давления на увеличение ковкости стали. *Слева* — части образца из мягкой стали, разрушенные при растяжении при атмосферном давлении. *Справа* — образец из той же стали, растянутый без разрушения в жидкости до значительного уменьшения его площади сечения при давлении в 25 000 *кг/см*^{2}

для создания высоких давлений должно быть еще более компактным; поршень теперь имеет лишь 1,6 *мм* в диаметре, а объем камеры составляет несколько кубических миллиметров. Как цилиндр, так и поршень изготовлены из карболоя; кроме того, на цилиндр устанавливается с натягом металлический кожух, который придает дополнительную прочность. Пьезометр показан на рис. 3. Однако даже такая конструкция не позволила бы расширить диапазон давлений от 50 000 до 100 000 *кг/см*^{2}, если бы не удачное изменение свойств металлов при высоких давлениях. При давлении 25 000 *кг/см*^{2} обычные марки стали способны выдерживать без разрушения почти неограниченные деформации; увеличение их ковкости проиллюстрировано на рис. 4. Даже карболой теряет свою нормальную хрупкость и выдерживает без разрушения гораздо более высокие напряжения растяжения, чем сталь.

К настоящему моменту были изучены сжимаемость и полиморфные переходы у 30-ти элементов и простых соединений в диапазоне давлений до 100 000 *кг/см*^{2}.

Давления выше 100 000 *кг/см*^{2} могут быть получены лишь для очень малых объемов с помощью устройств, полностью изготовленных из карболоя. Но к настоящему моменту в этой области давлений не было получено никаких результатов, представляющих особый физический интерес.

Помимо создания определнного давления, существует задача измерения этого давления и определения его влияния на состояния вещества. В первую очередь необходимо определить некоторые различные неподвижные точки. В диапазоне до 30 000 *кг/см*^{2} было найдено достаточное число таких точек, что позволяет выполнять измерения с точностью до 0,1%. Полиморфный переход висмута в окрестности 25 000 *кг/см*^{2} является одной из удобных точек. Предельно важной частью технологии измерения является наблюдение за изменением сопротивления манганина при возрастании давления, что впервые было предложено Лизелем в Упсале (Lisell at Uppsala). Диапазон выше 30 000 *кг/см*^{2} промаркирован не так хорошо; возможно, что измерения в интервале до 100 000 *кг/см*^{2} имеют точность примерно 2%.

Естественно считать уменьшение объема как самым простым и самым фундаментальным следствием гидростатического давления. Именно по этой причине оно будет рассмотрено в первую очередь. Однако его непросто измерить экспериментально, поскольку все непосредственно полученные измерения зависят от удерживающего сосуда, который сам может деформироваться. Возможно, потребуются детально разработанные процедуры для того, чтобы полностью исключить влияние этих искажений.

Изучение сжатия газов находится за рамками этой лекции; при давлении 1 000 *кг/см*^{2} или больше плотность газов имеет тот же порядок, что и их плотность в жидкой фазе, поэтому здесь уже нет существенной разницы между газом и жидкостью. Если вычертить зависимость объема любой обычной жидкости от давления при постоянной температуре, то получим кривую, которая в области низких давлений будет иметь высокую степень кривизны и крутую касательную, — что означает высокую сжимаемость; при переходе в область высоких давлений кривизна резко уменьшается, а кривая становится более пологой. На рис. 5 изображена зависимость объема от давления для обычной

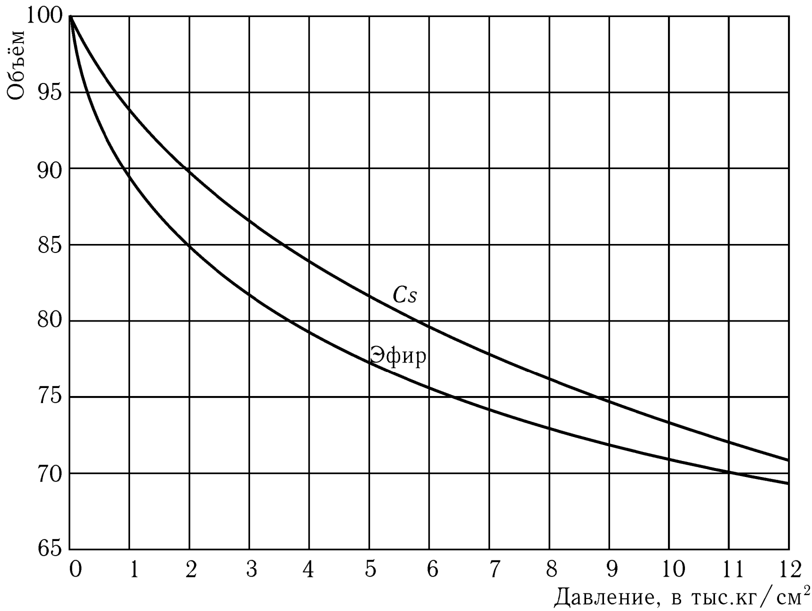

Рис. 5. Объем как функция от давления для типичной жидкости — эфира. Также приведена соответствующая кривая для цезия — наиболее сжимаемого вещества в твердом состоянии. Изначально жидкость обладает большей сжимаемостью по сравнению с твердым состоянием вещества, однако при более высоких давлениях ситуация меняется

жидкости — эфира. Для сравнения приведена кривая самого сжимаемого твердого вещества — цезия. Два различных физических механизма лежат в основе различного поведения в области высоких и низких значений давления. Узкая область высокой сжимаемости соответствует диапазону, где давление главным образом уплотняет молекулы в веществе, исключая свободное пространство между ними. В этой области различные вещества могут проявить свойственные им существенные и характерные различия. В более высоком диапазоне давлений молекулы вступают в непосредственный контакт, и сжимаемость увеличивается вследствие уменьшения объема самих молекул. Этот эффект сохраняется с относительно небольшим уменьшением в широком интервале давлений. Разумеется, этот эффект имеет место и при более низких значениях давления, однако здесь он скрыт намного большим эффектом, возникающим вследствие уменьшения свободного пространства между молекулами. При попытке вывести зависимость объема от давления, опираясь лишь на результаты измерения в диапазоне низких давлений, с большой вероятностью будет упущено влияние сжимаемости молекул. В результате фактические объемы при высоких давлениях будут значительно меньше, чем теоретические значения, экстраполированные из формул для диапазона низких давлений. Фактически это касается всех формул, выведенных с помощью данных, полученных при низких давлениях.

Удивительно, но несмотря на первоначальные различия, объемы обычных органических жидкостей при высоких давлениях принимают близкие значения. Для того, чтобы проиллюстрировать быстрое падение сжимаемости при росте давления, отметим, что изменение объема в диапазоне до 5 000 *кг/см*^{2} приблизительно равно среднему изменению объема в диапазоне от 5 000 *кг/см*^{2} до 50 000 *кг/см*^{2}; это явление подчеркивается тем фактом, что уменьшение объема для последнего диапазона зачастую включает и скачки объема при замерзании.

В области низких давлений, где происходит уплотнение молекул до непосредственного контакта, можно ожидать эффектов, зависящих от формы молекул, и того, что эти явления будут сильно зависеть от конкретных жидкостей. Дело обстоит именно таким образом. В области низких давлений разнообразные микроскопические аномалии накладываются на крупномасштабную однородность, и эти мелкомасшабные эффекты. Эти микроскопические эффекты сильно различаются для разных жидкостей. Таким образом, могут существовать поддиапазоны в диапазоне давлений до нескольких тысяч *кг/см*^{2}, где сжимаемость, вместо уменьшения при росте давления, вдруг возрастает. В этих поддиапазонах при возрастании давления также может наблюдаться рост, а не уменьшение коэффициента температурного расширения. Любая удовлетворительная теория жидкостей должна обязательно учитывать эти микроскопические эффекты, но в настоящий момент внимание в первую очередь должно быть уделено макроэффектам. Когда придет время создания теории жидкостей, то первым шагом может оказаться определение «идеальной» жидкости, аналогично идеальному газу, который сыграл очень важную роль в теории газов. Экспериментальные результаты показывают, что при высоких давлениях все обычные органические жидкости проявляют достаточную однородность в поведении; так что идеальная жидкость не так далека от реальности.

Область сжимаемости веществ в твердом состоянии значительно шире той же области у обычных жидкостей; например, сжимаемость цезия в 350 раз выше сжимаемости алмаза. Исходя из косвенных доказательств, наивысшая сжимаемость среди веществ в твердом состоянии, вероятно, принадлежит водороду и гелию. Как и в случае с жидкостями, сжимаемость веществ в твердом состоянии падает при увеличении давления. В общем случае этого следует ожидать из-за закона «сокращающегося дохода»; очевидно, это необходимо в том случае, когда давление неограниченно возрастает — если бы объем продолжал уменьшаться с начальной скоростью, то через некоторое время он стал бы отрицательным. Например, объем цезия мог бы стать отрицательным уже при давлении 14 000 $кг/см^2$, если бы он продолжал уменьшаться с первоначальной скоростью.

Несмотря на то, что сжимаемость веществ в твердом состоянии в среднем должна уменьшаться при росте давления, у них существует ярко выраженное качественное отличие от жидкостей — отсутствие начальной фазы резкого падения сжимаемости; сама кривая сжимаемости более равномерна на всем интервале давлений. Такие различия определяются кристаллической решеткой твердых тел; при росте давления атомы сохраняют свое положение в решетке и, как следствие из вынужденного сближения центров атомов, объем свободного пространства между ними уменьшается.

Уменьшение объемов для некоторых наиболее сжимаемых твердых тел как функция от давления представлено на рис. 6 в диапазоне до 100 000 $кг/см^2$. В общем случае поведение кривых носит ярко выраженный характер.

Хотя несколько раз высказывалось мнение о том, что уменьшение сжимаемости при росте давления следует из принципов термодинамики, это не так. Известны твердые вещества, чья сжимаемость растет с увеличением давления на сравнительно большом диапазоне. Наиболее ярким примером является кварцевое стекло. Для него не просто увеличивается сжимаемость, а растет скорость ее увеличения. Такой рост наблюдается в диапазоне до 35 000 $кг/см^2$, а затем внезапно прекращается. В этой точке наблюдается разрыв производной, переход «второго рода» по классификации Эренфеста, и начиная с этого момента сжимаемость начинает уменьшаться с ростом давления. Механизм, отвечаю-

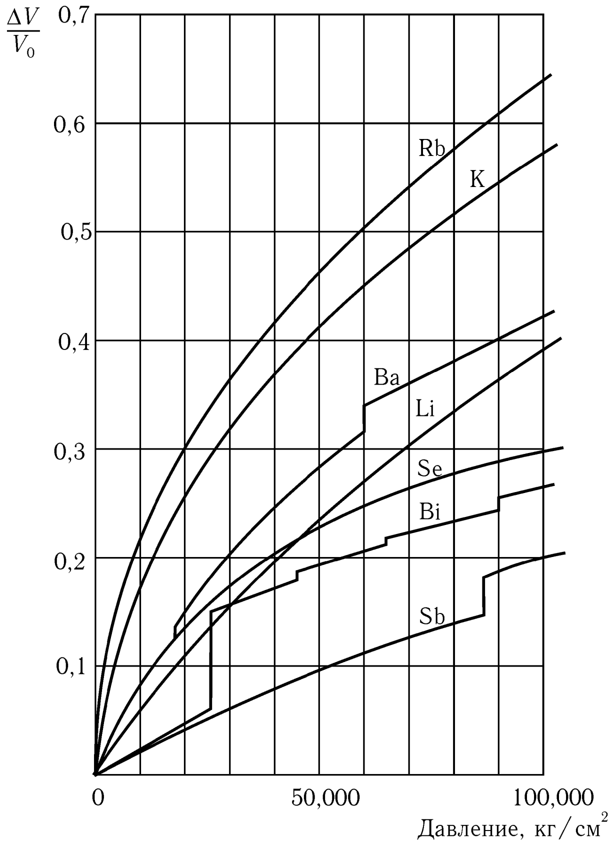

Рис. 6. Объемное сжатие некоторых элементов при давлении до 100 000 *кг/см*^{2}. Скачки некоторых кривых говорят о полиморфных переходах

щий за это явление при низком давлении, внезапно перестает действовать. Зависимость показана на рис. 7.

К настоящему моменту было рассмотрено влияние давления на объем изотропных веществ; они включают такие вещества, как стекло и все кубические кристаллы. Если же при кристаллизации вещества переходят в некубические системы, то их реакция на изменение давления более сложная. Сжимаемость в этом случае неравномерна по различным

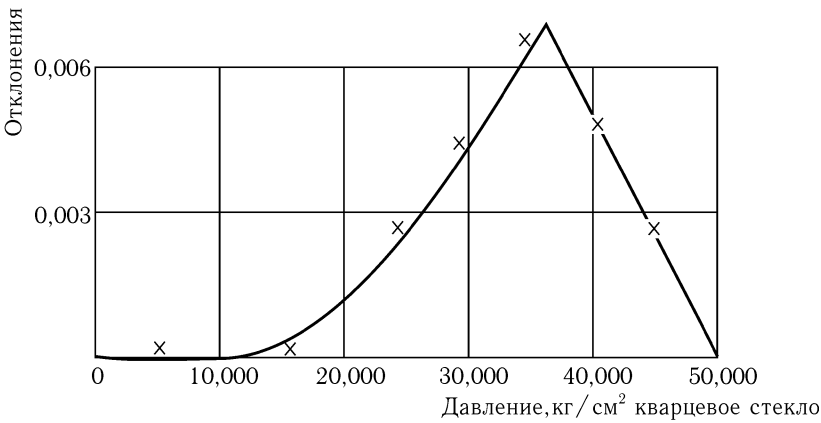

Рис. 7. Отклонения от линейности в уменьшении объема для кварцевого стекла при увеличении давления с единицей шкалы 5 000 *кг/см*^{2}. Пик кривой соответствует переходу от аномального поведения к нормальному

направлениям. Как следствие этого — изменение под давлением формы тел, состоящих из таких кристаллов. Разница в сжимаемости по различным направлениям может быть велика; так, сжимаемость цинка в направлении гексагональной оси в восемь раз превышает сжимаемость в направлении, перпендикулярном к данной оси. Можно ожидать некоторое отличие в сжимаемости для этого направления, поскольку расстояние между атомами вдоль гексагональной оси больше, чем в перпендикулярных направлениях, но никакие элементарные соображения не могут привести к объяснению таких больших различий. Существует даже такое вещество, теллур, которое обладает отрицательной сжимаемостью по определенной оси. Другими словами, если кристалл теллура подвергается гидростатическому давлению, будучи полностью погружен в жидкость, то он растягивается в некотором направлении.

Значительный успех был достигнут в теоретических расчетах влияния давления на объем простых веществ в твердом состоянии. Первым, кто сумел получить приемлемые значения шага решетки и начальной сжимаемости для простой ионной кристаллической решетки типа NaCl, был Макс Борн. Однако ему не удалось определить зависимость сжимаемости от давления, и даже сегодня в этом отношении не удалось добиться полного успеха. Недавно были получены более полные результаты для щелочных металлов, где были применены методы волновой механики. Удивительно, что для этих металлов Бардин (Bardeen) определил кривую зависимости объема от давления на всем экспериментальном интервале. Расчеты в этом случае просты, поскольку на каждый атом приходится лишь один свободный электрон, а главную роль в этом эффекте играет повышение кинетической энергии свободных электронов вследствие уменьшения эффективной длины волны при уменьшении объема. Другие металлы, имеющие большее число свободных электронов, сложнее поддаются расчету; однако ожидается, что трудности будут связаны лишь со сложностью вычислений.

Очевидно, теория еще не настолько развита, чтобы успешно разрешить вопрос о некубических кристаллах.

А сейчас давайте рассмотрим разрывность кривых объема, связанную с фазовыми изменениями различных видов. Простейшим примером является влияние давления на плавление. Исторически изучение влияния давления на плавление было связано с тем, что ожидаемый эффект должен быть аналогичен влиянию давления на парообразование. В частности, ожидалось, что должны быть некоторые критические явления, такие, что при превышении определенных значений давления и температуры возможен непрерывный переход между жидким и твердым состояниями вещества. Однако вскоре стало ясно, что шкала давлений для подобных явлений должна находиться гораздо выше шкалы критических явлений между жидкостью и газом. Например, если в последнем случае достаточными были давления в несколько сотен *кг/см*^{2}, то для наблюдения подобных явлений (если они вообще возможны) между жидким и твердым состояниями вещества требуются давления в несколько тысяч *кг/см*^{2}. При каждом расширении диапазона давления вероятность существования таких критических явлений сильно уменьшается. К настоящему моменту построены кривые плавления в диапазоне до 40 000 *кг/см*^{2}; некоторые из них показаны на рис. 8. Кривые плавления всех веществ имеют определенные общие качественные черты, поэтому здесь настолько же уместно говорить о *кривой плавления*, насколько допустимо говорить о *кривой парообразования.* Однако в других отношениях ситуация с плавлением качественно отличается от ситуации с парообразованием. В частности, все кривые плавления, т. е. кривые зависимости температуры плавления от давления, вогнуты относительно оси давления, и их кривизна уменьшается при увеличении давления. И кривая разности между объемами жидкого и твердого со-

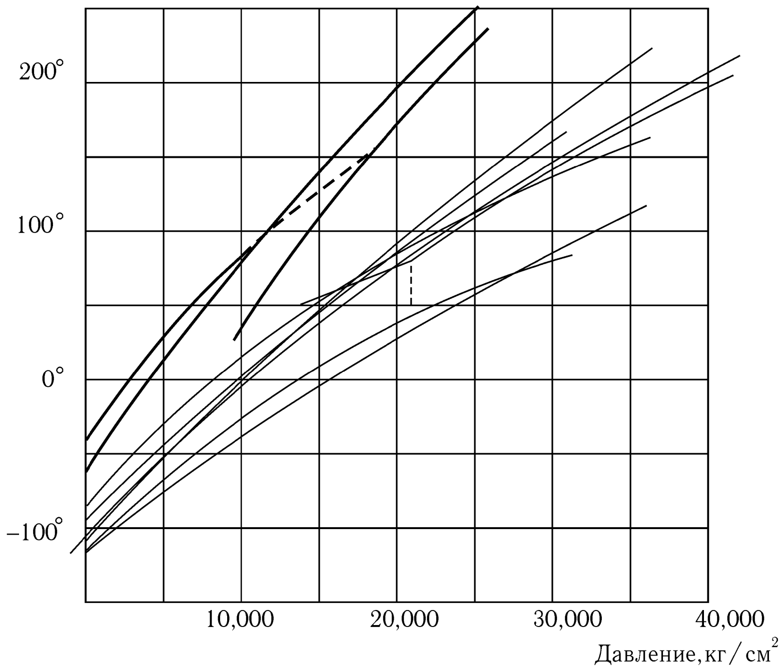

Рис. 8. Зависимость температуры плавления от давления для различных веществ. *Порядок веществ сверху вниз при* 15000 *кг/см*^{2}: хлороформ, хлорбензол, хлорбензол (второй тип модификации), вода (лед VI), 4-бутиловый спирт, гидросульфид углерода, метилен-хлорид, n-пропилбромид, этилбромид, этиловый спирт

стояний вещества как функция от давления является выпуклой относительно оси давления, при этом кривизна уменьшается при увеличении давления. В экспериментальном диапазоне давлений для этих кривых не было найдено ни одной критической точки. Если бы существовала такая точка вне изученного диапазона, то скрытая теплота и разность объемов жидкого и твердого состояний вещества должны обращаться в нуль при одних и тех же давлении и температуре. Экстраполяция кривых скрытой теплоты и разности объемов показывает, что ни одна из них не обращается в нуль при каком-либо конечном значении давления или температуры, не говоря уже о том, чтобы это происходило для двух кривых одновременно при одних и тех же температуре и давлении. В настоящее время вероятность отсутствия критических точек между жидкостью и твердым телом очень велика. По крайней мере, это относится к уже изученным веществам, среди которых находятся различные виды органических веществ и некоторые металлы. Та же форма доказательства позволяет исключить существование других свойств кривой плавления, таких, как максимальная или асимптотическая температура. В общем случае кривая плавления уходит (хотя и с уменьшающейся скоростью) в область бесконечно высоких температур и неограниченно возрастающего давления и становится почти прямой.

Опираясь на термодинамику, можно показать, что температура вещества должна возрастать с увеличением давления, если его объем увеличивается при плавлении, и что температура должна уменьшаться в противном случае. Для нормального диапазона давлений существует лишь три вещества, которые можно отнести к последней категории: вода, висмут, галлий. Установлено, что в соответствии с положениями термодинамики кривые плавления этих трех веществ убывают. Более того, их кривизна возрастает, и кривые убывают все быстрее и быстрее при росте давления. Такое состояние, очевидно, не может длиться вечно. Природа сама выходит из этого сложного положения путем «ликвидации» подобных аномальных веществ. При превышении определенного давления те пространственные решетки, которыми обладали эти вещества при первичной кристаллизации, становятся неустойчивыми и переходят в другие решетки. Новая решетка имеет объем гораздо меньший, чем предыдущая, и твердая фаза теперь намного более плотная, чем жидкая. Именно с этого момента кривая плавления, как и в случае со всеми другими веществами, начинает расти. Преобразование решетки имеет место при давлении: для воды — около 2 000 *кг/см*^{2}, для галлия — около 12 000 *кг/см*^{2}, для висмута — около 25 000 *кг/см*^{2}.

Фазовые изменения этих трех веществ представляют собой особый пример полиморфизма. Диаграмма состояний висмута показана на рис. 9. Полиморфизм представляет обычное явление при высоких давлениях; число примеров растет при расширении экспериментального диапазона давления и при увеличении чувствительности методов обнаружения малых скачкообразных изменений объема. В диапазоне температур от комнатной до 200°C и давлений до 50 000 *кг/см*^{2} приблизительно одна треть всех изученных веществ являются полиморфными. Для более широкого диапазона условий, например, такого, который наблюдается в земной коре, есть все основания предполагать, что ни одно

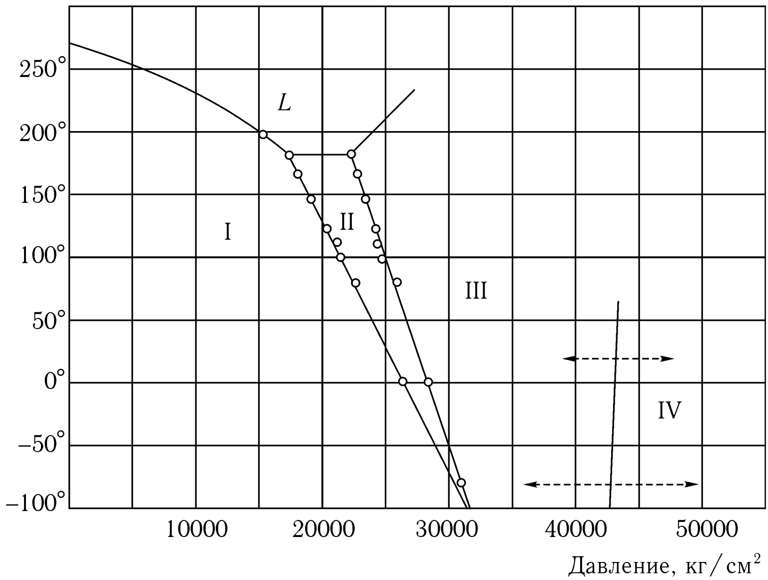

Рис. 9. Диаграмма состояний висмута. Стрелки на линии фазового перехода III–IV определяют диапазоны давлений, внутри которых переход осуществляется при возрастании или уменьшении давления

вещество не имеет той решетки, которую можно наблюдать в лабораторных условиях, если только эта решетка не имеет очень простой вид. Значимость такого вывода для геофизики очевидна.

Термодинамика полиморфного фазового перехода такая же, что и термодинамика плавления, но, помимо этого, между двумя этими явлениями нет почти ничего общего; в то время как общее понятие «кривая плавления» существует, понятия общей кривой полиморфного перехода не существует. Есть лишь три убывающие кривые плавления, которые исчезают при высоких давлениях; но существует множество убывающих кривых полиморфного перехода, и их число возрастает при повышении давления. В диапазоне от 12 000 *кг/см*^{2} до 50 000 *кг/см*^{2} 41% новых кривых полиморфного перехода — убывающие. Кривые полиморфного перехода могут иметь горизонтальные или вертикальные касательные, кривые плавления — ни тех, ни других. Кривые полиморфного перехода могут быть либо выпуклыми, либо вогнутыми, кривые плавления — только вогнуты. Разница объемов двух полиморфных фаз может увеличиваться или уменьшаться в направлении возрастания температуры вдоль кривой фазового перехода; разность объемов жидкого и твердого состояний вещества всегда понижается. Сжимаемость для диапазона высоких давлений может быть выше или ниже сжимаемости для низких давлениях; сжимаемость жидкости всегда выше сжимаемости твердого состояния вещества. Вещества могут обладать некоторым числом полиморфных форм, а полное отображение температур и давлений фазовых переходов для всех форм может привести к очень сложным диаграммам состояния. Так висмут имеет шесть различных фаз. Вода, обладающая несколькими поразительными аналогиями с висмутом, — семь фаз. Наиболее сложной фазовой диаграммой, построенной к настоящему времени, можно считать диаграмму камфары, обладающей одиннадцатью фазами.

На сегодняшний день существует лишь два обобщения, касающихся полиморфных переходов. Первое говорит о том, что не может существовать критических точек и непрерывных переходов между различными полиморфными формами. Наличие таких точек подразумевает непрерывный переход от одного вида кристаллической решетки к другому — что кажется очень маловероятным, хотя, возможно, логически допустимым. Второе обобщение заключается в том, что переходы в простейших пространственных решетках вида $CsCl$ в сторону уменьшения объема происходит не вследствие роста давления; возможно, такая решетка настолько проста, что ее структуру сложно нарушить. Разумеется, второе обобщение имеет под собой меньшее число примеров, чем первое, и поэтому является менее гарантированным.

До сих пор мы рассматривали термодинамически обратимые переходы; когда давление убирается, первоначальная форма восстанавливается. Помимо таких обратимых переходов необходимо признать существование переходов необратимых, т.е. изменений, вызванных приложением давления, которые, однажды возникнув, не исчезают. Найдены два ярких примера необратимых переходов. Первый пример — фосфор. Если обычный желтый фосфор поместить под давление в 12000 *кг/см*^{2} при температуре более 200°C, то он необратимо изменится — станет черным твердым веществом, похожим на графит и по виду, и по электрической проводимости, хотя сам желтый фосфор является хорошим изолятором. Этот пример был единственным на протяжении ряда лет. Совсем недавно я обнаружил, что обыкновенный жидкий бисульфид углерода CS_2 при температуре около 200°C и давлении в 40 000 *кг/см*^{2} необратимо переходит в вещество черного цвета. Определенно, что черное вещество не является смесью серы и углерода, как это можно предположить, а очевидно представляет однородное вещество — твердую фазу черного цвета бисульфида углерода. Есть предположение о том, что эта структура представляет собой одну гигантскую молекулу, подобно уже известной структуре кварца SiO_2, который очень схож с бисульфидом углерода CS_2 с точки зрения строения атомов. Очень захватывающе рассуждать о том, что существует много других обычных веществ, которые могут с помощью высоких давлений необратимо переходить некий рубеж и приобретать еще неизвестную форму. До тех пор, пока не будет получено теоретическое объяснение этих двух известных необратимых переходов, в некоторой степени разумно предположить существование других подобных веществ. Фактически, есть экспериментальное подтверждение возможности осуществления многих подобных переходов. В проведенных экспериментах, где я комбинировал высокие касательные напряжения с большим гидростатическим давлением, мною наблюдались некоторые необратимые переходы в уже известные формы, а также огромное число цветовых изменений, которые говорят о перманентном изменении структуры. Тогда не было возможности определить, были ли новые вещества образованы именно при данных условиях, поскольку их количество было слишком мало, чтобы обеспечить удовлетворительный анализ.

Теперь перейдем к другим видам явлений, связанных с приложением давления. Возможно, что самыми простыми для измерения являются эффекты, связанные с влияние давления на электрическое сопротивление. Измерения проводились при комнатной температуре и выше, в диапазоне давлений до 30 000 *кг/см*^{2} и при температуре жидкого воздуха и давлении до 7 000 *кг/см*^{2}. При низких температурах существует естественное ограничение на величину создаваемого давления, которое обуславливается замерзанием среды — проводника давления. В данном случае — это газообразный азот. На рис. 10 показано влияние давления (до 30 000 *кг/см*^{2}) на щелочные металлы при комнатной температуре.

Прежде всего, в каждом отдельном случае давление по-разному влияет на сопротивление; порядок коэффициента сопротивления, зависящего от давления, в общем случае в 10 раз выше порядка объемной сжимаемости. Как следствие, влияние давления на высокосжимаемые металлы сильнее, чем на слабосжимаемые. Это верно в общем случае,

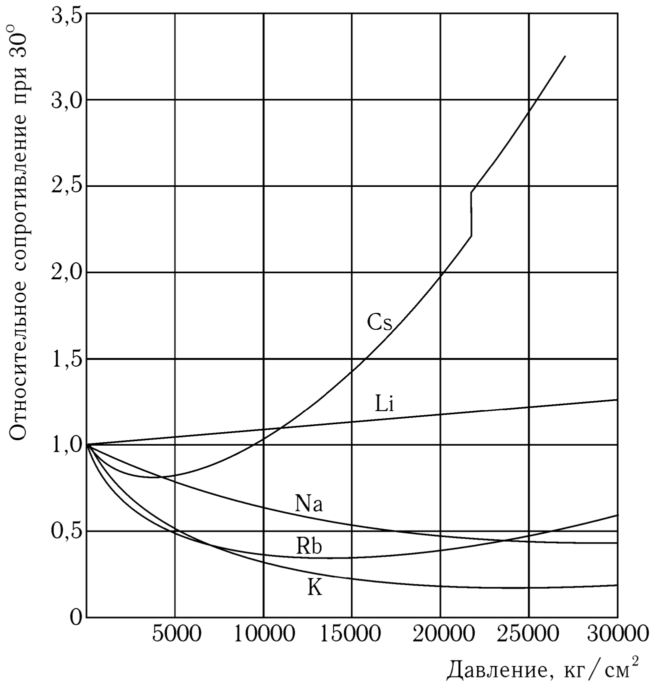

Рис. 10. Относительное сопротивление щелочных металлов в диапазоне давлений до 30 000 *кг/см*^{2}. Скачок кривой для цезия говорит о полиморфном переходе. Кривая для калия имеет несколько размытый минимум в области 23 000 *кг/см*^{2}

но здесь часто встречаются исключения. Сопротивление примерно трех четвертей всех металлов падает с увеличением давления; как ожидалось, скорость уменьшения сопротивления понижается при росте давления, т. е. кривая сопротивления как функция давления имеет выпуклую форму в направлении оси давления. С другой стороны, существует несколько металлов, таких, как литий, стронций и висмут, сопротивление которых под давлением растет. Удивительно, что для этих металлов действует закон возрастающей доходности, т. е. скорость роста сопротивления возрастает при увеличении давления. Это значит, что для этих металлов кривая зависимости сопротивления от давления имеет выпуклую форму. И наконец, есть несколько металлов, которым присущи оба вида поведения, т. е. на начальном этапе их сопротивление падает, проходит через минимум и начинает расти. Примером таких металлов являются цезий, рубидий, калий и барий. Таким образом, можно сделать вывод о том, что выпуклость кривой сопротивления характерна для всех металлов, а сами кривые могут рассматриваться как части единой зависимости; при этом единственным различием для разных металлов является то, что для них по-разному определяется положение истинного нуля относительно атмосферного давления.

Физиками-теоретиками был достигнут значительный успех в объяснении влияния давления на сопротивление. Как и ожидалось, при рассмотрении настолько нелинейных явлений можно заметить присутствие по крайней мере двух механизмов, препятствующих друг другу. Во-первых, проявляется зависящее от давления явление, представляющее аналог свободного пробега электрона в старой газо-электронной теории металлической проводимости. Оно связано с изменением размеров и в общем случае приводит к увеличению длины свободного пробега, т. е. к снижению сопротивления при росте давления. Во-вторых, здесь имеет место перегруппировка энергетических уровней, т. е. наблюдается изменение количества свободных (эффективных) электронов в том случае, когда энергетические зоны почти полностью заняты. В зависимости от особенностей атомного взаимодействия это может приводить как к увеличению, так и к уменьшению сопротивления. Для некоторых простых случаев были сделаны приближенные расчеты, которые показывают, что (например, для лития) рост сопротивления с увеличением давления связан преимущественно с уменьшением числа свободных электронов.

Влияние давления на электрическое сопротивление одиночных кристаллов в некоторых случаях довольно сложное. Если кристалл имеет кубическую пространственную решетку, то вещество ведет себя как изотропное тело; но в том случае, когда система обладает симметрией более низкого порядка, то сопротивление по разным направлениям может отличаться. Например, для сурьмы влияние давления имеет разный знак в разных направлениях, имеются направления в кристалле, для которых кривая сопротивления проходит через максимум при увеличении давления, в то время как для других направлений кривая сопротивления понижается и имеет кривизну, естественную для других веществ.

Сопротивления некоторых полупроводников могут падать настолько быстро, что приближаются к абсолютным характеристикам сопротивления металлов. Первые исследования в этой области были проведены Монтеном из Упсала (Montén in Uppsala) для селена и сульфида серебра. Теллур приближается по своим свойствам к металлам при 30 000 *кг/см*^{2}. При этом не только происходит падение абсолютной величины сопротивления до характеристически низкого значения, но и изменение знака первоначально отрицательного температурного коэффициента, который становится положительным, как у металлов. Теория еще далеко не в состоянии объяснить эти сложные явления как в случае с одиночными кристаллами, так и с полупроводниками.

С электрической проводимостью металлов тесно связана их теплопроводность; эта взаимосвязь выражается через приближенный закон Видемана–Франца, определяющего отношение электро- и теплопроводности для всех металлов. Под давлением теплопроводность металла изменяется вместе с электропроводностью. Но измерить первую гораздо сложнее, чем последнюю, поэтому удовлетворительные измерения были проведены лишь для нескольких металлов и при давлении до 12 000 *кг/см*^{2}. Эти эксперименты показали, что соотношение Видемана–Франца почти не зависит от давления.

Влияние давления на теплопроводность жидкости гораздо сильнее, чем на теплопроводность металлов; кроме того, она легче поддается измерению. В общем случае теплопроводность обычных жидкостей увеличивается в два-три раза при росте давления до 12 000 *кг/см*^{2}. Для воды это значение несколько ниже; при 12 000 *кг/см*^{2} ее теплопроводность увеличивается лишь на 50%. Существует тесная зависимость между влиянием давления на теплопроводность обычных жидкостей и влиянием давления на скорость распространения звука в этих жидкостях. Таким образом, теплопроводность жидкости имеет в первую очередь механическую природу; тепло переносится за счет микроскопических механических волн, распространяющихся со скоростью, которая традиционно определяется сжимаемостью. Незначительное влияние давления на теплопроводность обуславливается малым изменением сжимаемости воды с ростом давления.

Другим свойством металлов, очевидно, связанным с электо- и теплопроводностью, является их термоэлектрическая характеристика. Это свойство также подвержено влиянию давления. В общем случае термоэлектрическое поведение металла под давлением отличается от поведе-

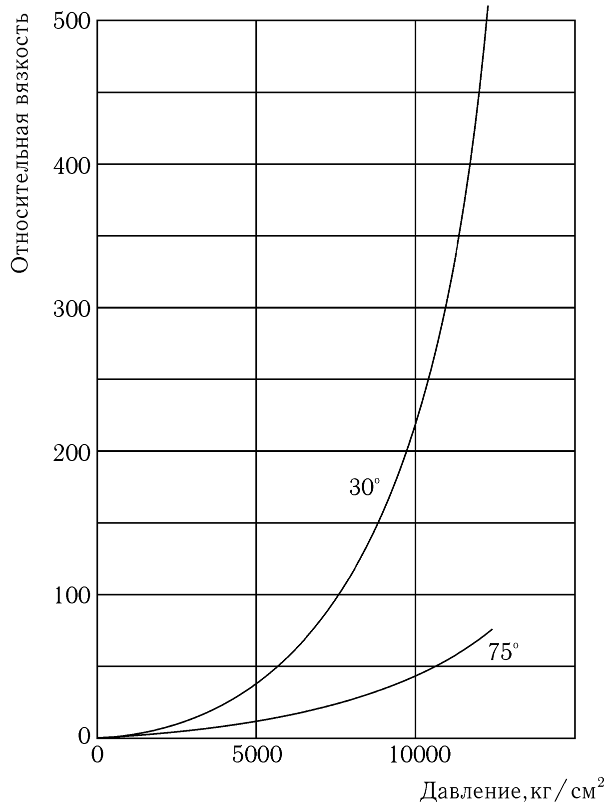

Рис. 11. Влияние давления на вязкость изобутилового спирта

ния того же металла, находящегося при нормальном давлении. Поэтому такой металл может быть использован для создания термопар, где одна ее часть состоит из обычного металла, находящегося под обычным давлением, а другая — из того же самого металла, но находящегося под гидростатическим давлением. При давлении в 12 000 *кг/см*^{2} термоэлектрическая мощность таких термопар сопоставима с мощностью термопар, состоящих из различных металлов и находящихся при обычном давлении. Было проведено изучение некоторых таких «баропар» (pressure couples). Явление является достаточно сложным, поэтому не существует универсального правила для определения знака воздействия, т. е. имеют место как перемены знака, так и значительные отклонения от линейности. Для объяснения этих явлений нет ни одной удовлетворительной теории. В настоящее время можно сделать только заключение, что в данное явление вносят вклад несколько различных механизмов.

Лучше всего на сегодняшний день изучено влияние давления на вязкость жидкостей. В общем случае вязкость с ростом давления увеличивается, кроме того, скорость ее увеличения также резко возрастает при увеличении давления. Рост кривой вязкости обычно происходит экспоненциально с увеличением давления, а иногда даже быстрее, чем экспоненциально. На рис. 11 показаны кривые вязкости изобутилового спирта при давлении 12 000 *кг/см*^{2} и температурах 30°C и 75°C. При увеличении давления до 10 000 *кг/см*^{2} рост вязкости может определяться коэффициентом 10^7 (для эвгенола). Скорость роста непосредственно связана со сложностью строения молекул и имеет бо́льшие значения для сложных молекул. Для сравнительно простой жидкой воды при давлении 10 000 *кг/см*^{2} вязкость увеличивается в два или три раза, а в случае с моноатомной ртутью вязкость увеличивается лишь на 30%. Для метилового спирта вязкость увеличивается в 10 раз, для пропилового спирта — в 100 раз, для амилового спирта — в 1000 раз. За последние годы физики-теоретики добились значительного успеха в объяснении влияния давления на вязкость жидкостей.

Перси Уильям Бриджмен

АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Дизайнер М. В. Ботя
Технический редактор А. В. Широбоков
Компьютерный набор и верстка С. В. Высоцкий
Корректор О. Ю. Кучеренко

Лицензия ЛУ № 084 от 03.04.00. Подписано в печать 24.03.01.
Формат 60 × 84$^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,60. Уч. изд. л. 8,73.
Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага офсетная № 1.
Тираж 1000 экз. Заказ № 6.

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»
426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.
http://rcd.ru E-mail: borisov@uni.udm.ru